Algorithmen und Datenstrukturen (ESE)
Entwurf, Analyse und Umsetzung von Algorithmen (IEMS)
WS 2014 / 2015

Vorlesung 5, Donnerstag, 20. November 2014
(Wie baut man eine Hash Map, Universelles Hashing)

Junior-Prof. Dr. Olaf Ronneberger
Image Analysis Lab
Institut für Informatik
Universität Freiburg

[basiert auf der gleichnamigen Veranstaltung von Prof. Dr. Hannah Bast, Lehrstuhl für Algorithmen und Datenstrukturen]

Blick über die Vorlesung heute

UNI FREIBURG

- Organisatorisches
  - Tipp für Windows Benutzer: cygwin
- Hash Maps
  - Eine mögliche Realisierung von einer Map
  - Dabei zentral: **universelles Hashing**
  - Beispiele für universelle Klassen von Hashfunktionen
  - Übungsblatt: Mittels eines Programms nachprüfen, dass eine Klasse von Hashfunktionen universell ist
  - **Achtung:** dazu kam in den letzten Prüfungen jedes Mal eine Aufgabe, und wenige haben es ganz richtig gemacht !

Erfahrungen mit dem Ü4 (häufigster Städtename)

UNI FREIBURG

- Zusammenfassung/Auszüge (Stand 20.11. 09:00)
  - Bei den meisten sehr zeitaufwändig vor allem für das File einlesen und Java/C++ Probleme
  - Ergebnis sortieren vs. hashing. Bei einigen kein großer Zeitunterschied, z.T. sogar Sortieren schneller (Je nach Computer)
  - → nächste Aufgabe wieder ganz einfacher Code, aber anspruchsvollere Theorie.

Tipp für Windows-Benutzer

UNI FREIBURG

- Cygwin
  - Download unter www.cygwin.com
  - Dann haben Sie in Ihrer normalen DOS shell auch alle bekannten Unix/Linux Befehle
  - Insbesondere: cut, head, tail, less, more, sort, uniq, ...

Wie baut man eine Map?

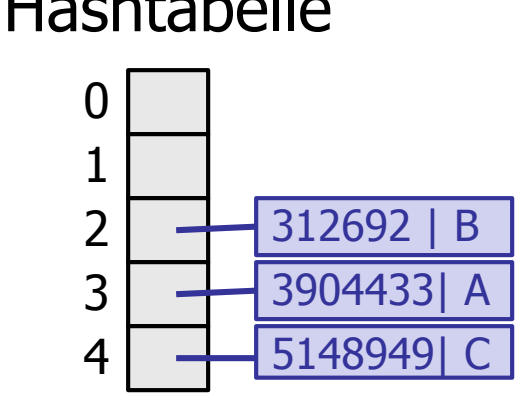
UNI FREIBURG

- Zur Erinnerung
  - Ein assoziatives Array ist wie ein normales Array, nur dass die Indizes nicht 0, 1, 2, ... sind, sondern irgendwas, z.B. Telefonnummern
- Problem
  - Schnell ein Element mit einem bestimmten Schlüssel finden
  - Naive Lösung: Paare von Schlüsseln und Werten in einem normalen Feld (Java: ArrayList, C++: vector) speichern

    Array<KeyValuePair>
  - Bei n Schlüsseln kostet die Suche dann bis zu $\Theta(n)$ Zeit
  - Mit einer Hash Map geht es im günstigsten Fall in Zeit $\Theta(1)$ ... und zwar egal wieviele Elemente schon in der Map sind!

HashMap — Grundidee

- Grundidee
  - Abbildung der Schlüssel auf die Indizes von einem normalen Feld, mit Hilfe einer sogenannten Hashfunktion
- Ein einfaches Beispiel
  - Schlüsselmenge {3904433, 312692, 5148949 }
  - Hashfunktion h(x) = x modulo 5, also Wertebereich [0..4]
  - Ein gewöhnliches Feld T der Größe 5 („Hashtabelle" mit 5 „Buckets")
  - Wir speichern das Element mit Schlüssel x in T[h(x)]
    - insert(3904433, A)
      - h(3904433) → 3 ; T[3] = (3904433, A)
    - insert(312692, B)
      - h(312692) → 2 ; T[2] = (312692, B)
    - insert(5148949, C)
      - h(5148949) → 4 ; T[4] = (5148949, C)



Hashkollision

- search(3904433)
  - h(3904433) → 3 ;
    T[3] → (3904433,A)
- search(123457)
  - h(123459) → 4 ;
    T[4] → 123459 gibt's nicht

– In unseren Beispiel jetzt Zugriff in Θ(1) Zeit

– Weitere Elemente einfügen:

- insert(876543, D)
  - h(876543) → 3 ; KOLLISION
  - Häufiger als man denkt. „Geburstagsphänomen": von 25 Personen haben 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von ½ am selben Tag Geburtstag

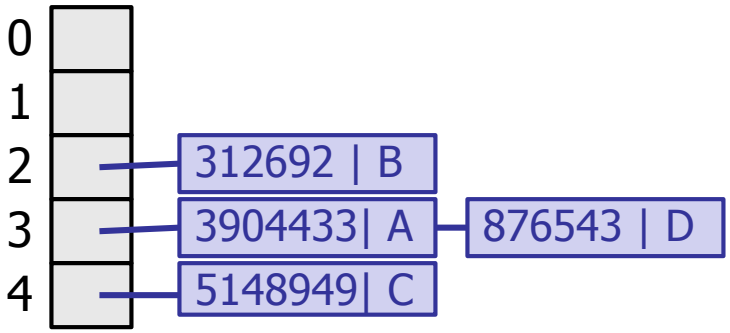
– Problem: zwei Schlüssel mit $x \neq y$ aber $h(x) = h(y)$

– Einfachste Lösung: Liste von KeyValuePair's in jedem Bucket, Realisierung z.B. als Array von Arrays
Array<Array<KeyValuePair>> hashTable;

– Einfügen dann am Ende der Liste

- T[3][1] = (876543, D)

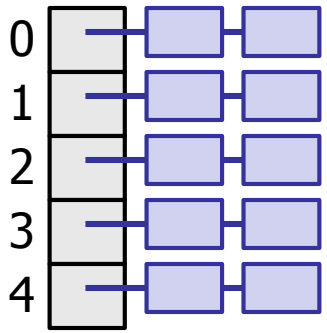
Hashtabelle



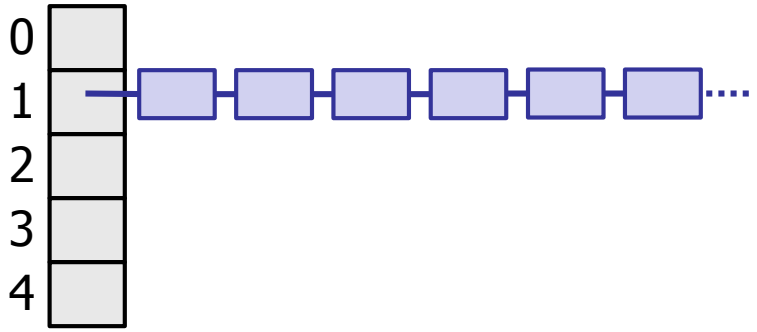
HashMap: Laufzeit

- Laufzeit für die Schlüsselsuche
  - Im besten Fall werden die Schlüssel gleichmäßig auf das Feld verteilt
    - Bei n Schlüsseln und einer Hashtabelle der Größe m sind das dann $\approx n/m$ Schlüssel pro Eintrag

Beispiel: n=10, m=5



  - Im schlechtesten Fall werden alle Schlüssel auf denselben Eintrag der Hashtabelle abgebildet (entarteter Hash)
    - Dann sind wir wieder bei Zeit $\Theta(n)$



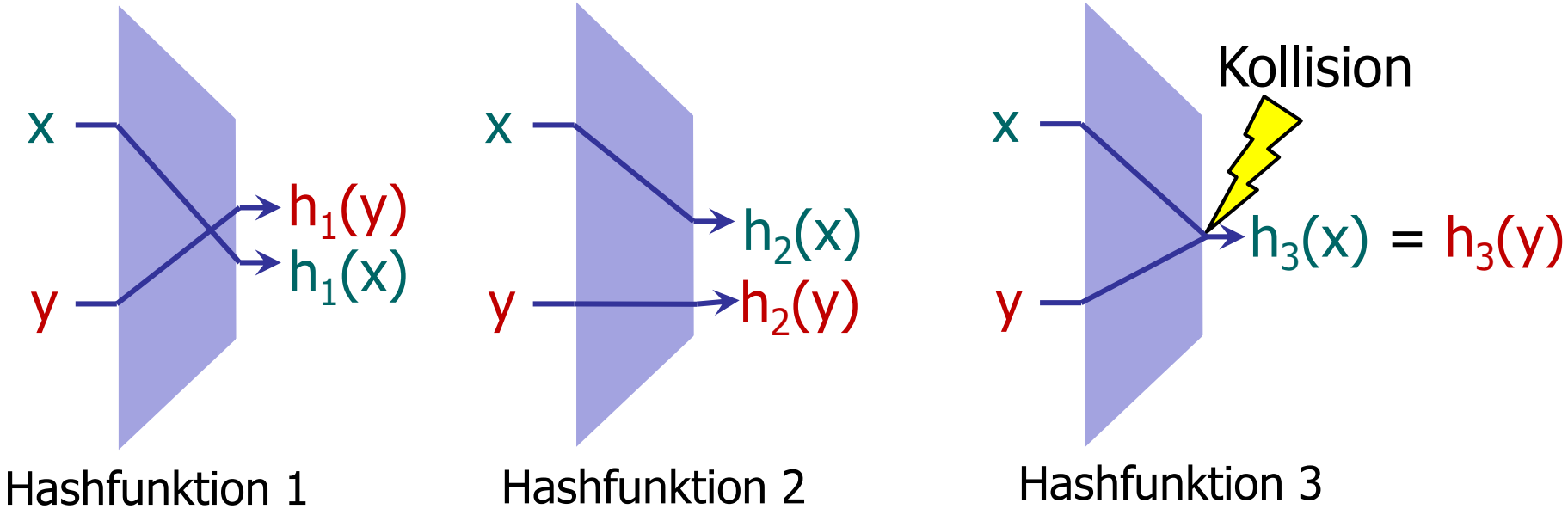
Gedankenexperiment

UNI FREIBURG

- Ich denke mir eine Hashfunktion aus. Können Sie einen Satz von Telefonnummern finden, dass mein Hash garantiert entartet?
- Was könnte ich machen, damit mein Hash-Algorithmus für einen gegebenen Satz von Telefonnummern nicht entartet?

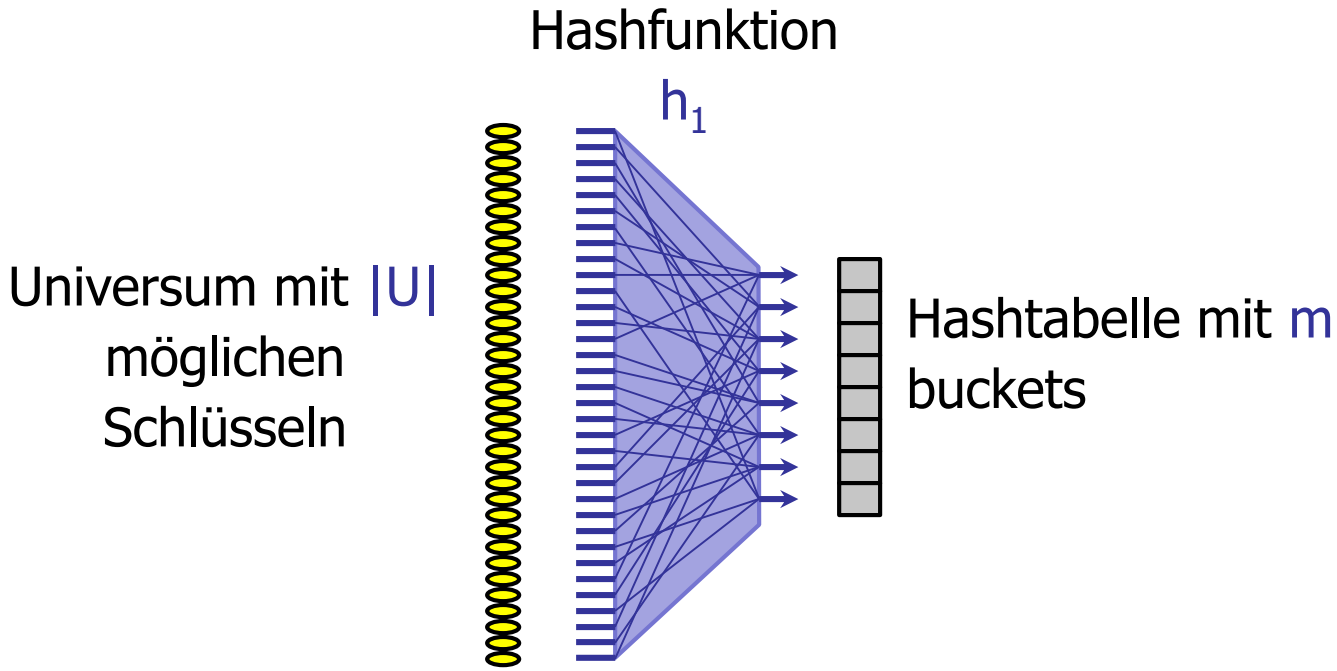
Universelles Hashing: Idee

- Lösung
  - Wir wählen die Hashfunktion zufällig aus einer geeigneten Menge von Hashfunktionen, so dass die Schlüssel im Erwartungsfall gleichmäßig verteilt sind
  - Das nennt man **universelles Hashing**



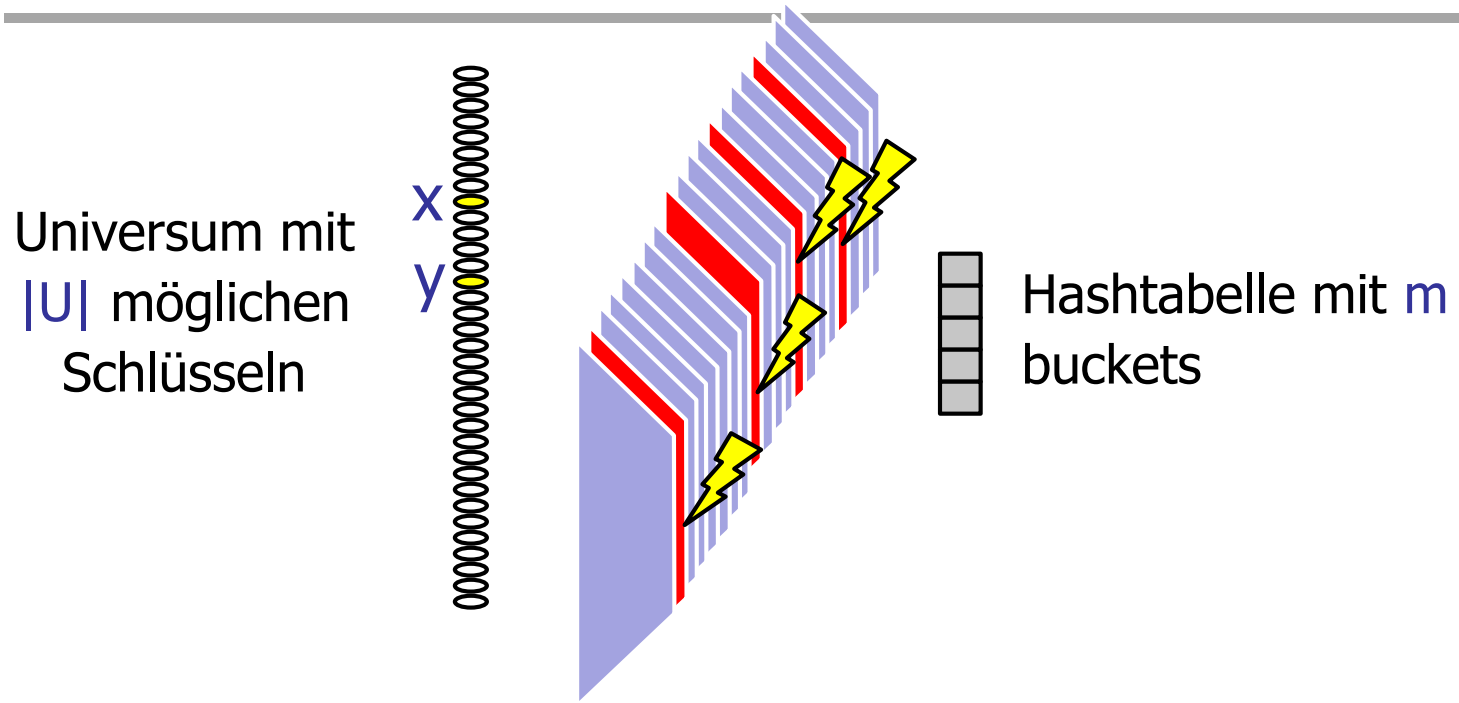
Hashfunktion 1 Hashfunktion 2 Hashfunktion 3

Universelles Hashing: Definition 1/3



- Definition
  - Sei U die Menge der möglichen Schlüssel (Universum)
  - Sei m die Größe der Hashtabelle
  - Sei $H=\{h_1,h_2, \ldots ,h_N\}$ eine Menge von Hashfunktionen mit $h_i: U \rightarrow \{0, ..., m-1\}$

Universelles Hashing: Definition 2/3



H: Menge der Hashfunktionen,
Beispiel: 4 von 20 (=20%) führen zu einer Kollision von x und y

- H ist c-universell wenn für alle x, y ∈ U mit x ≠ y gilt:

Anzahl der Hashfunktionen, die zu einer Kollision führen

$$\frac{|\{h \in H : h(x) = h(y)\}|}{|H|} \leq c \cdot \frac{1}{m}$$

Anzahl aller Hashfunktionen

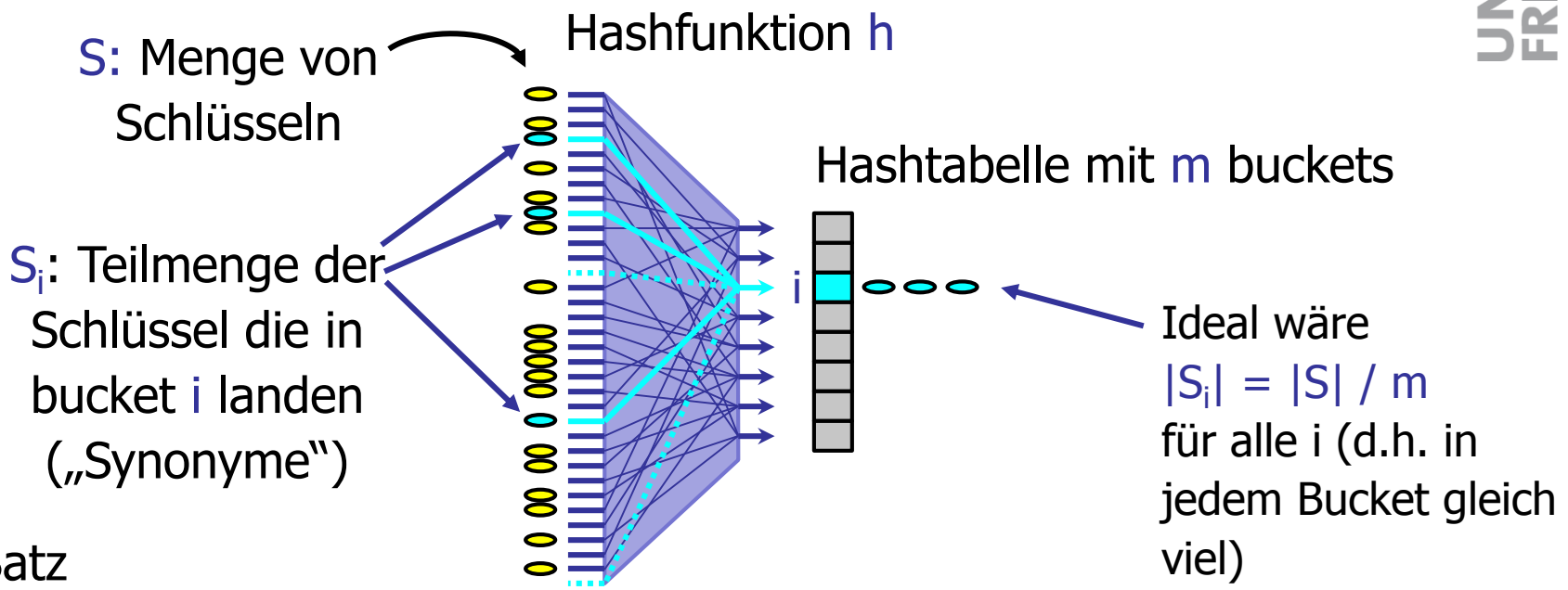
Universelles Hashing: Definition 3/3

UNI FREIBURG

- Definition: $$\frac{|\{h \in H : h(x) = h(y)\}|}{|H|} \leq c \cdot \frac{1}{m}$$
  - Mit anderen Worten, wenn h ϵ H zufällig gewählt wird, dann ist Prob(h(x) = h(y)) ≤ c · 1 / m
  - Bemerkung: wenn die Hashfunktion jeden Schlüssel x und y **zufällig** in eine der m buckets der Hashtabelle schmeißt, dann

    Prob(Kollision) = 1 / m
  - Das wäre dann gerade c = 1. Besser geht's nicht

Universelles Hashing: Satz



- Satz
  - Sei H eine c-universelle Klasse von Hashfunktionen
  - Sei S eine Menge von Schlüsseln und $h \in H$ zufällig gewählt
  - Sei S_i die Menge der Schlüssel x mit $h(x) = i$
  - Dann ist der Erwartungswert $E(|S_i|) \leq 1 + c \cdot |S| / m$ für alle i
    (mittlere Anzahl von Elementen, die wir im Bucket durchsuchen müssen, um unseren Schlüssel zu finden)
  - Insbesondere: Falls $m = \Omega(|S|)$ gilt $E(|S_i|) = O(1)$

Universelles Hashing: Beweis 1/3

- Für den Beweis brauchen wir Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Also zuerst ein kleiner Auffrisch- bzw. Crash- Kurs dazu

Einschub: Wahrscheinlichkeitsrechnung 1/4

UNI FREIBURG

- Wahrscheinlichkeitsraum / Ereignisse
  - Wir beschränken uns hier auf den diskreten Fall
  - Wahrscheinlichkeitsraum Ω von sog. Elementarereignissen
  - Die haben Wahrscheinlichkeiten ... Bedingung $\Sigma_{e \in \Omega} Pr(e) = 1$
  - Ereignis E = Teilmenge von Ω, Wahrsch. $Pr(E) = \Sigma_{e \in E} Pr(e)$
  - Zum Beispiel: zweimal würfeln, dann $\Omega = \{1,...,6\}^2$
    - Jedes e aus Ω hat dann Wahrscheinlichkeit $Pr(e) = 1/36$
    - E = beide Augenzahlen sind gerade, dann $Pr(E) =$

e	Pr(e)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

e	Pr(e)
(1,1)	1/36
(1,2)	1/36
(1,3)	1/36
...	...
(6,5)	1/36
(6,6)	1/36

(2,2) (4,2) (6,2)
(2,4) (4,4) (6,4)
(2,6) (4,6) (6,6)

$9 \cdot \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Einschub: Wahrscheinlichkeitsrechnung 2/4

e	Pr(e)	X
(1,1)	1/36	2
(1,2)	1/36	3
(1,3)	1/36	4
…	…	…
(2,1)	1/36	3
(2,2)	1/36	4
…	…	…
(6,5)	1/36	11
(6,6)	1/36	12

Augenzahl	Pr(X = Augenzahl)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
…	…
12	1/36

- Zufallsvariable
  - … weist einem Ausgang des Zufallsexperiments eine Zahl zu
  - Zum Beispiel: X = Summe Augenzahlen bei zweimal Würfeln
  - Sowas wie $X = 12$ oder $X \geq 7$ sind dann einfach Ereignisse
  - Beispiel 1: Prob(X=2) = $\frac{1}{36}$
  - Beispiel 2: Prob(X=4) = $\frac{3}{36}$

Einschub: Wahrscheinlichkeitsrechnung 2/4

UNI FREIBURG

1 Würfel

Augenzahl	Pr(X=Augenzahl)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

2 Würfel

Augenzahl	Pr(X = Augenzahl)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
…	…
12	1/36

– **Erwartungswert** ist definiert als $\mathbf{E}(X) = \Sigma\, k \cdot Pr(X = k)$

Intuitiv: gewichtetes Mittel der möglichen Werte von X, wobei die Gewichte die Wahrscheinlichkeiten der entspr. Werte sind

Beispiel: 1x würfeln: $\mathbf{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$

Beispiel: 2x würfeln: $\mathbf{E}(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$

Einschub: Wahrscheinlichkeitsrechnung 3/4

UNI FREIBURG

- Summe von Erwartungswerten
  - Für beliebige (diskrete) Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

    $\mathbf{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \ldots + \mathbf{E}(X_n)$
  - Beispiel:

X_1: Augenzahl von Würfel 1 → $\mathbf{E}(X_1) = 3.5$

X_2: Augenzahl von Würfel 2 → $\mathbf{E}(X_2) = 3.5$

$X = X_1 + X_2$: Gesamtaugenzahl → $\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(X_1)+\mathbf{E}(X_2) = 3.5+3.5 = 7$

$E(X_1+X_2)$

Einschub: Wahrscheinlichkeitsrechnung 4/4

UNI FREIBURG

- Korollar: Bei einem Zufallsexperiment tritt das Ereignis E mit Wahrscheinlichkeit p auf. Sei X die Anzahl der Auftreten von E bei n Ausführungen dieses Experimentes, dann ist **E**(X) = n · p
- Beispiel: **E**(Anzahl Sechser bei 60 mal Würfeln) = 10
- Beweis Korollar:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Ereignis eintritt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das nennt man **Indikatorvariable**

$$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(X) = E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \overset{\text{letzte Folie}}{=} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{\text{Def. E-Wert}}{=} \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p \quad \square$$

$E(X_1 + X_2 + \ldots)$ $\qquad$ $E(X_1) + E(X_2) + \ldots$

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0 \cdot \Pr(X_i = 0) + 1 \cdot \Pr(X_i = 1) \\ &= \Pr(X_i = 1) \\ &= p \end{aligned}$$

Universelles Hashing: Beweis 2/3

- **Gegeben**: Für x, y ∈ U mit x ≠ y und ein zufälliges h ∈ H gilt: Prob(h(x) = h(y)) ≤ c · 1 / m
- **Zu beweisen**: $E(|S_i|) \leq 1 + c \cdot |S| / m$ für alle i

$S_i = \{x \in S : h(x) = i\}$

falls $S_i = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |S_i| = 0$

ansonsten, sei $x \in S_i$ irgendein Schlüssel

Definiere Indikatorfunktion $I_y = \begin{cases} 1, & \text{falls } h(y) = i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $y \in S \setminus \{x\}$

$$\Rightarrow |S_i| = 1 + \sum_{y \in S \setminus \{x\}} I_y$$

$$\Rightarrow E(|S_i|) = E\left(1 + \sum_{y \in S \setminus \{x\}} I_y\right) = 1 + \sum_{y \in S \setminus \{x\}} E(I_y)$$

Universelles Hashing: Beweis 3/3

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} E(I_y) &= \Pr(I_y = 1) \\ &= \Pr(h(y) = i) \\ &= \Pr(h(y) = h(x)) \\ &\leq c \cdot \frac{1}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + \sum_{y \in S \setminus \{x\}} E(I_y) &\leq 1 + \sum_{y \in S \setminus \{x\}} c \cdot \frac{1}{m} \\ &= 1 + (|S| - 1) \cdot c \cdot \frac{1}{m} \\ &\leq 1 + |S| \cdot c \cdot \frac{1}{m} \quad = 1 + c \cdot \frac{|S|}{m} \end{aligned}$$

$$E(|S_i|) \leq 1 + c \cdot \frac{|S|}{m} \quad \square$$

Universelles Hashing: Beispiele 1/3

UNI FREIBURG

- Negativbeispiel
  - Die Menge aller h mit $h_a(x) = (a \cdot x) \bmod m$, für ein $a \in U$
  - Ist nicht c-universell, warum?
  - Falls universell: $\forall x, y \;\; x \neq y : \frac{|\{h \in H : h(x) = h(y)\}|}{|H|} \leq c \cdot \frac{1}{m}$
  - Für welches x,y ist der Anteil der Hashfunktionen, die zu einer Kollision führen, größer als c/m ?

Universelles Hashing: Beispiele 2/3

UNI FREIBURG

- Positivbeispiel 1
  - Sei p eine große Primzahl, und zwar $p > m$ und $p \geq |U|$
  - Sei H die Menge aller h mit $h_{a,b}(x) = ((a \cdot x + b) \bmod p) \bmod m$

    wobei $1 \leq a < p$, und $0 \leq b < p$
  - Die ist **≈ 1**-universell, siehe Exercise 4.11 in Mehlhorn/Sanders
  - z.B.: $U = \{0, \ldots, 99\}$, $p = 101$, $a = 47$, $b = 5$
  - Dann ist $h(x) = ((47x + 5) \bmod 101) \bmod m$
  - Sehr einfach zu implementieren, etwas kompliziert zu beweisen, deswegen Übungsaufgabe:
  - Empirisch zeigen, dass sie 2-universell ist.

Universelles Hashing: Beispiele 3/3

- Positivbeispiel 2
  - Die Menge aller h mit $h(x) = (a \bullet x) \bmod m$, für ein $a \in U$
    - Schreibe $a = \Sigma_{i=0..k-1}\, a_i \cdot m^i$, wobei $k = \text{ceil}(\log_m |U|)$
    - Entsprechend $x = \Sigma_{i=0..k-1}\, x_i \cdot m^i$
    - Dann $a \bullet x := \Sigma_{i=0..k-1}\, a_i \cdot x_i$
    - Intuitiv: das "Skalarprodukt" der Darstellung zur Basis m
  - Die ist **1**-universell, siehe Theorem 4.4 in Mehlhorn/Sanders
  - Beispiel: $U = \{0, \ldots, 999\}$, $m=10$, $a=348$, und $x=127$
  - Dann ist $a_2=3$, $a_1=4$, $a_0=8$, und $x_2=1$, $x_1=2$, $x_0=7$
  - $(a \bullet x) \bmod 10 = (3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 7) \bmod 10 = 7$

Literatur / Links

- Hash Maps
  - In Mehlhorn/Sanders:

    4 Hash Tables and Associative Arrays
  - In Cormen/Leiserson/Rivest

    12 Hash Tables
  - In Wikipedia

    http://de.wikipedia.org/wiki/Hashtabelle

    http://en.wikipedia.org/wiki/Hash_table
- Hash Map in Java und in C++

  http://download.oracle.com/javase/1.4.2/docs/api/java/util/HashMap.html

  http://www.sgi.com/tech/stl/hash_map.html