Algorithmen und Datenstrukturen (ESE)
Entwurf, Analyse und Umsetzung von Algorithmen (IEMS)
WS 2013 / 2014

Vorlesung 10, Donnerstag 9. Januar 2014
(Verkettete Listen, Binäre Suchbäume)

Junior-Prof. Dr. Olaf Ronneberger
Image Analysis Lab
Institut für Informatik
Universität Freiburg

[basiert auf der letztjährigen Veranstaltung von Prof. Dr. Hannah Bast, Lehrstuhl für Algorithmen und Datenstrukturen, mit Folien aus „Informatik 2" von Prof. Dr. Matthias Teschner]

Blick über die Vorlesung heute

UNI FREIBURG

- Binäre Suchbäume (binary search trees)
  - Was ist das?
  - Wofür braucht man die?
  - Übungsblatt 10: Einfache Implementierung (nur insert und lookup, kein remove) + ein paar einfache Laufzeittests

Motivation: Sortierte Folgen

UNI FREIBURG

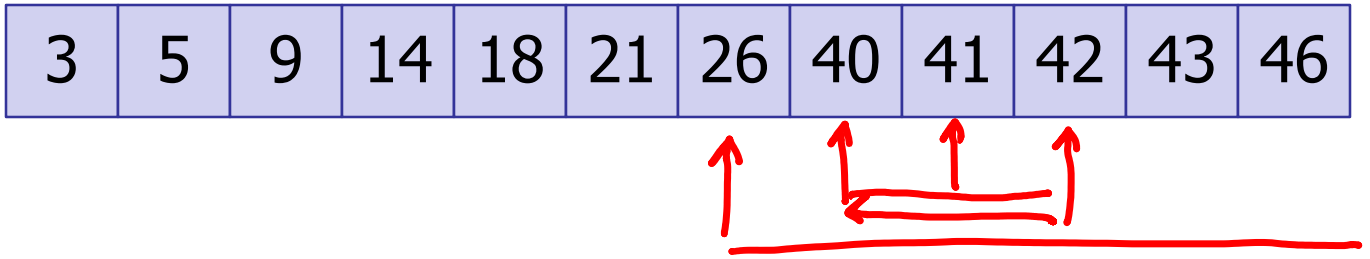
- Problem
  - Wir wollen wieder (key, value) Paare / Elemente verwalten
  - Wir haben wieder eine Ordnung $<$ auf den Keys
  - Diesmal wollen wir folgende Operationen unterstützen
    - insert(key, value): füge das gegebene Paar ein
    - remove(key): entferne das Paar mit dem gegebenen Key
    - lookup(key): finde das Element mit dem gegebenen Key; falls es das nicht gibt, finde das Element mit dem kleinsten Key der $>$ key ist
    - next / previous: für ein gegebenes Element, finde das mit dem nächstgrößeren / nächstkleineren Schlüssel; damit lässt sich insbesondere über alle Elemente iterieren

Wo braucht man das?

UNI FREIBURG

- Typisches Anwendungsbeispiel: Datenbanken
  - Eine große Menge von Records
  - Zum Beispiele Bücher, Produkte, Wohnungen, ...
  - Typische Suchanfrage: alle Wohnungen zwischen 400 und 600 Euro Monatsmiete
    - Ein sogenannter **range query**
    - Das bekommt man mit lookup und next
    - Man beachte: es ist dafür nicht wichtig, dass es eine Wohnung gibt, die **genau** 400 Euro kostet
  - Wenn man ein paar records hinzufügt oder alte löscht, will man nicht jedes Mal erst alles wieder neu sortieren

Lösung 1 (nicht gut): Einfache Arrays



- Mit einem einfachen sortierten Array bekommen wir
  - lookup in Zeit $O(\log n)$
    - das geht mit **binärer Suche**,
    - z.B. lookup(41)
  - next und previous in Zeit $O(1)$
    - klar, sie stehen ja direkt nebeneinander
  - insert und remove in Zeit bis zu $\Theta(n)$
    - bis zu $\Theta(n)$ Elemente müssen umkopiert werden

Lösung 2 (schlecht): Hashtabellen

UNI FREIBURG

- Mit einer Hashtabelle bekommt man
  - insert und remove in erwarteter Zeit $O(1)$
    - bei genügend großer Hashtabelle und guter Hashfunktion
  - lookup in erwarteter Zeit $O(1)$
    - aber nur wenn es ein Element mit **exakt** dem gegebenen Key gibt, sonst bekommt man gar nichts
  - next und previous in Zeit bis zu $\Theta(n)$
    - die Reihenfolge, in der die Elemente in einer Hashtabelle stehen hat nichts mit der Reihenfolge der Keys zu tun!

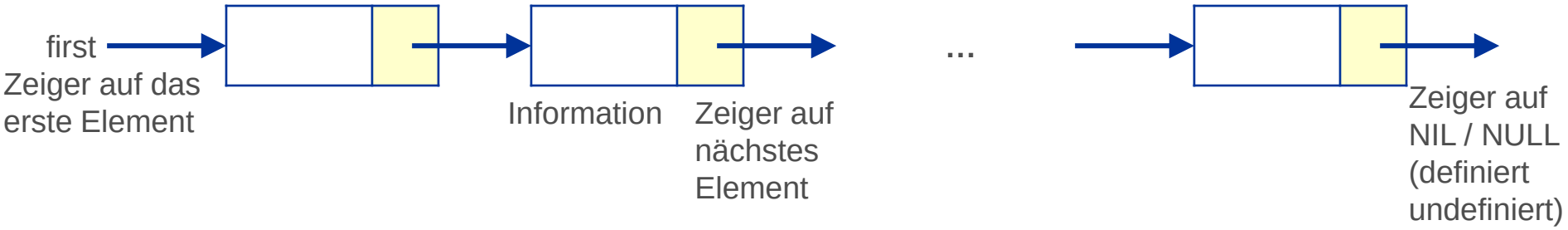
Lösung 3 (gut?) Verkettete Liste

UNI FREIBURG

- Mit einer doppelt verketteten Liste bekommt man
  - next und previous in Zeit $O(1)$
  - insert und remove in Zeit $O(1)$
  - lookup in Zeit bis zu $\Theta(n)$
- Auch noch nicht das, was wir wollten
- Aber verkettete Listen sind eine wichtige Datenstruktur, und ein Teil der besten Lösung.

Verkettete Liste

- dynamische Datenstruktur
- Zahl der Elemente während der Laufzeit frei wählbar
- Elemente bestehen aus einfachen oder zusammengesetzten Datentypen
- Elemente sind durch Zeiger / Referenzen auf ein folgendes Element verbunden
- einfache oder doppelte Verkettung



Eigenschaften im Vergleich zum Feld

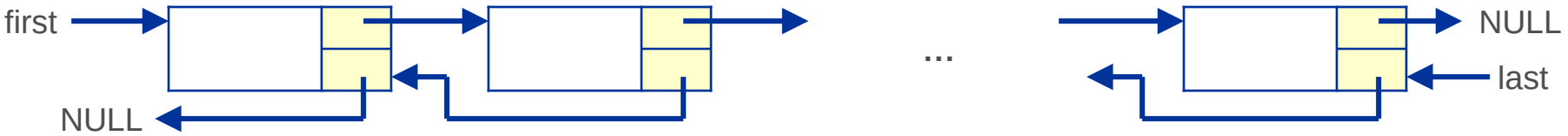
- geringer Mehrbedarf an Speicher
- Einfügen und Löschen von Elementen erfolgt ohne Umkopieren anderer Elemente
- Zahl der Elemente kann beliebig verändert werden
- kein direkter Zugriff auf Elemente (Liste muss durchlaufen werden)

Varianten

- Liste mit Listenkopf und Ende-Zeiger

- enthält Zeiger auf erstes Element
- kann weitere Informationen enthalten (z. B. Zahl der Elemente)

- doppelt verkettete Liste (ein Zeiger zum folgenden Element, ein zweiter Zeiger zum vorherigen Element)



Element / Knoten
Implementierung in Java

basiert auf Mary K. Vernon:
"Introduction to Data Structures"
http://pages.cs.wisc.edu/~vernon/cs367/cs367.html

```
public class Listnode
{
   private int data;
   private Listnode next;

   public Listnode(int d)
   { data = d; next = null; }

   public Listnode(int d, Listnode n)
   { data = d; next = n; }

   public int getData() { return data; }
   public void setData(int d) { data = d; }

   public Listnode getNext() { return next; }
   public void setNext(Listnode n) { next = n; }
}
```

2 Felder: Daten (hier lediglich ein Integer) und ein Zeiger / eine Referenz auf Listnode
private: nur innerhalb der Klasse zugreifbar

2 Konstruktoren: Initialisierung von Instanzen der Klasse

Funktionen zum Lesen und Schreiben der private-Felder.
Kapselung: Erlaubt die Einhaltung von Zusicherungen an den Inhalt der Felder.

Die Daten eines Knoten sind hier durch "int" vereinfacht repräsentiert. Üblicherweise verwendet man hier selbst definierte Referenzdatentypen, z. B. Object data; . In dem Fall reservieren die Konstruktoren lediglich Speicher für Zeiger / Referenzen auf den Datentyp Object.

Element / Knoten Implementierung in C++

```
class Listnode
{
 private:
   int data;
   Listnode* next;

 public:
   Listnode(int d)
   { data = d; next = NULL; }

   Listnode(int d, Listnode* n)
   { data = d; next = n; }

   int getData() { return data; }
   void setData(int d) { data = d; }

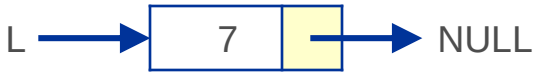
   Listnode* getNext() { return next; }
   void setNext(Listnode* n) { next = n; }
}
```

Pointer statt Referenzen

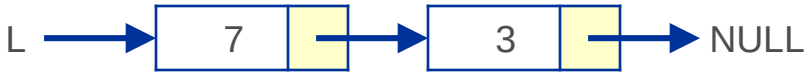
Beispiele Java

- `Listnode L;`

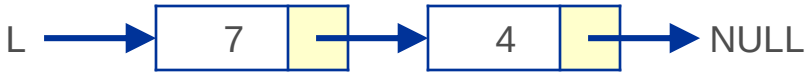
- `L = new Listnode(7);`



- `L.setNext(new Listnode(3));`



- `L.getNext().setData(4);`

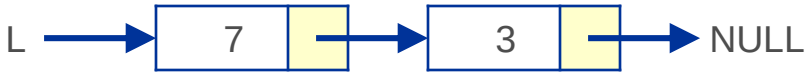


Beispiele C++

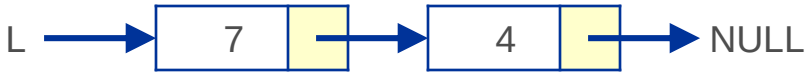
- `Listnode* L;`

- `L = new Listnode(7);`

- `L->setNext(new Listnode(3));`



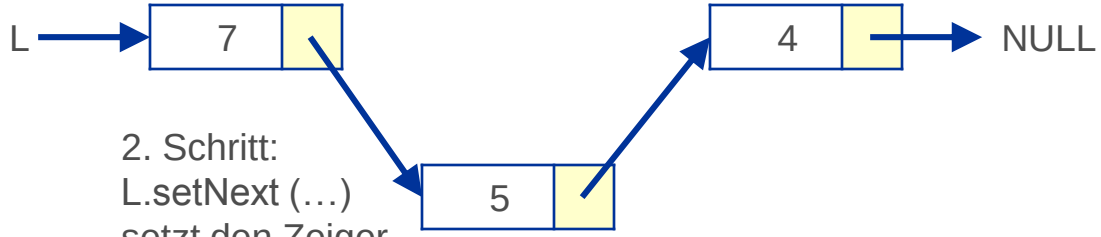
- `L->getNext()->setData(4);`



Beispiele (ab hier nur noch Java)

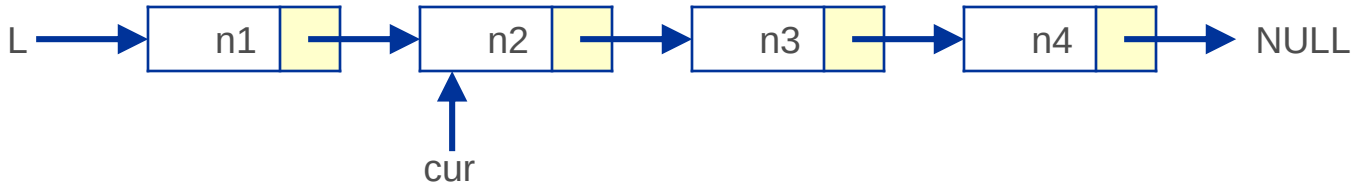
- Einfügen zwischen dem ersten und dem zweiten Element

```
L.setNext( new Listnode(5, L.getNext()));
```

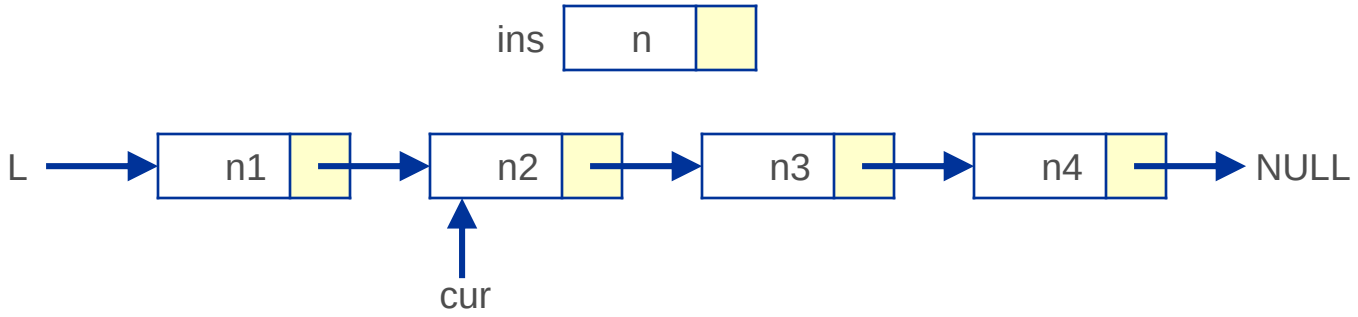


Einfügen eines Knotens

- Einfügen eines Knotens ins hinter einem Knoten cur

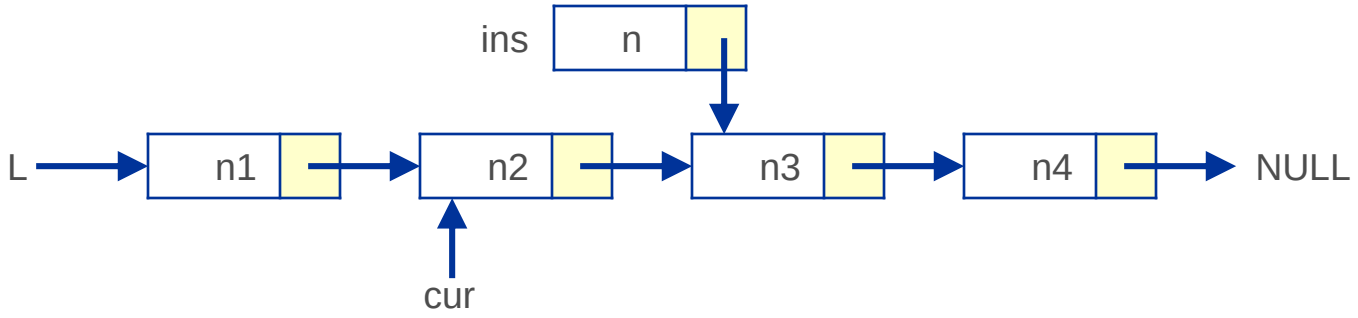



```
Listnode ins = new Listnode(n);
```

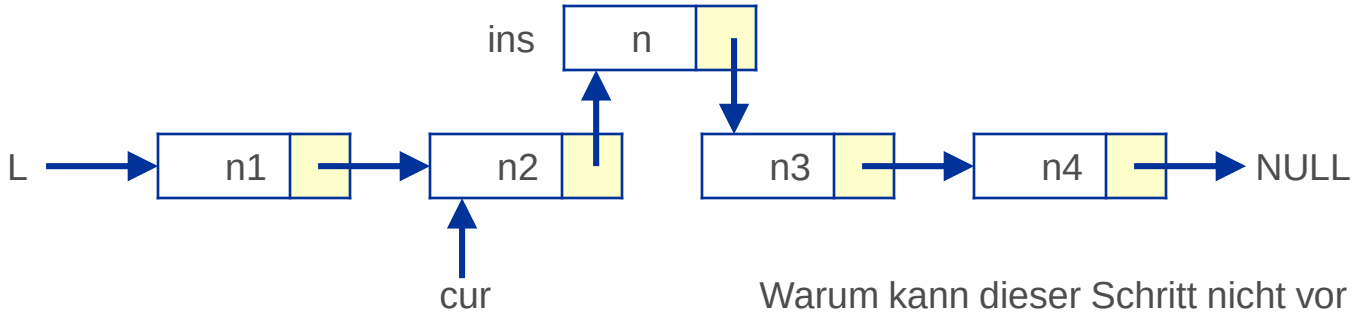


Einfügen eines Knotens

- `ins.setNext(cur.getNext());`



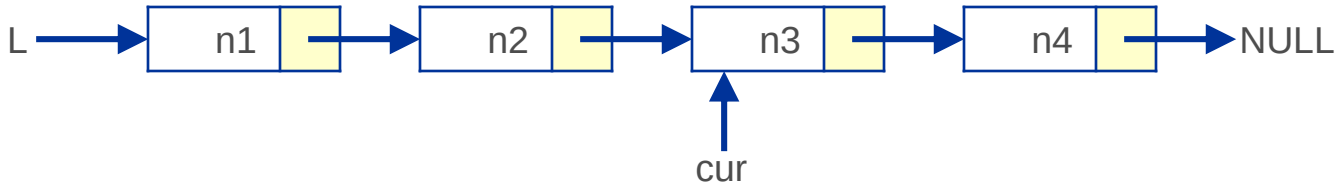
- `cur.setNext(ins);`



Warum kann dieser Schritt nicht vor insert.setNext durchgeführt werden?

Löschen eines Knotens

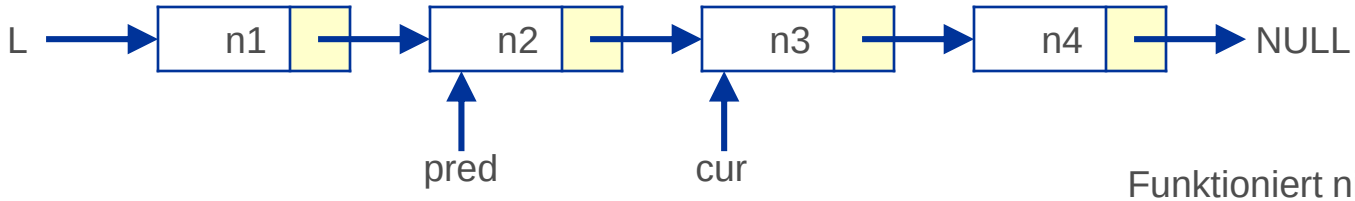
- Löschen eines Knotens cur



- Finde den Vorgängerknoten pred

```
Listnode pred = L;
while (pred.getNext() != cur)
   pred = pred.getNext();
```

Laufe elementweise durch die Liste, bis pred.next auf cur zeigt.
O (n)

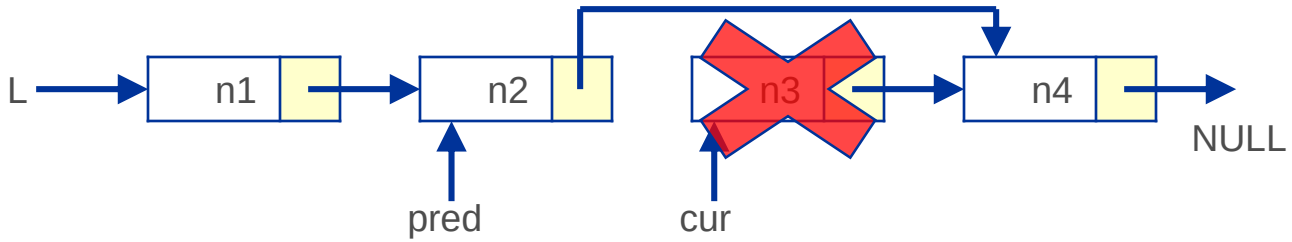


Funktioniert nicht für den ersten Knoten!

Löschen eines Knotens

- setze den next-Zeiger des Vorgängers von cur auf den Nachfolger von cur

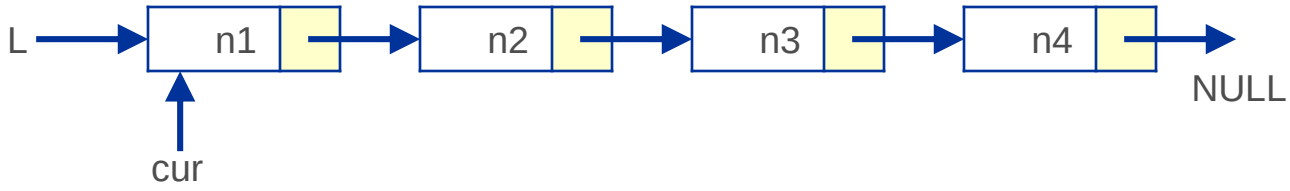
```
pred.setNext(cur.getNext());
```



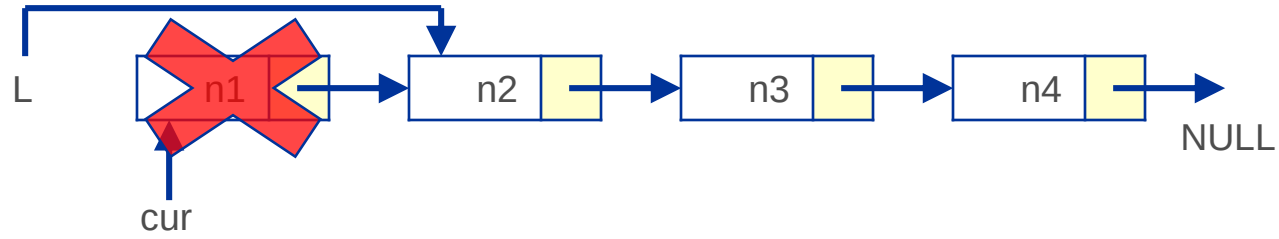
- Wenn keine weitere Referenz auf die durch cur angegebene Instanz existiert und cur auf eine andere Instanz gesetzt wird, ist das gelöschte Element nicht mehr zugreifbar. In C++ muss der belegte Speicher durch delete als Gegenstück zu new freigegeben werden.

Sonderfall

- Löschen des ersten Knotens



- `if (cur == L) { L = cur.getNext(); }`



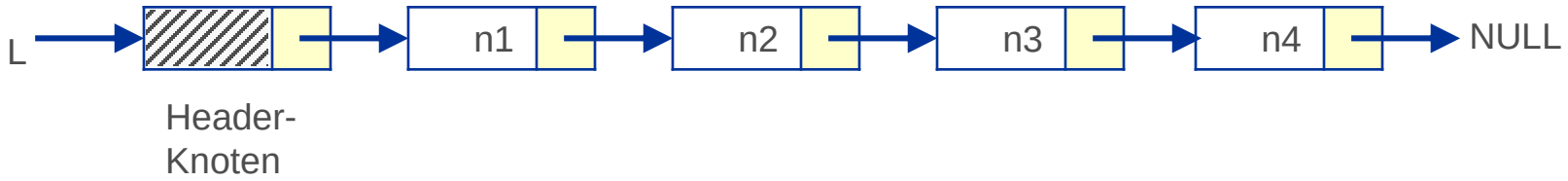
Löschen eines Knotens

- generelles Löschen

```
if (cur == L)
{
   L = cur.getNext();
}
else
{
   Listnode pred = L;
   while (pred.getNext() != cur)
      pred = pred.getNext();
   pred.setNext(cur.getNext());
}
```

Vermeidung des Sonderfalls

- Header-Knoten



- Vorteil
  - Löschen des ersten Knotens ist kein Sonderfall
- Nachteil
  - weitere Funktionen müssen berücksichtigen, dass der erste Knoten nicht zur Liste gehört, z. B. Ausgabe aller Elemente, Zählen der Elemente

Verkettete Liste (mit Header-Knoten)

```
public class List
{
   private Listnode first, last;
   private int numItems;

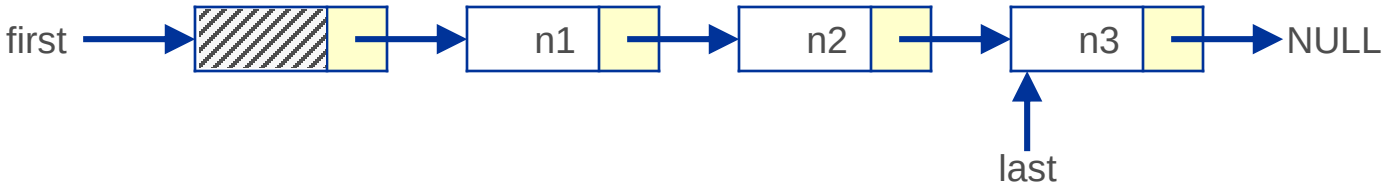
   public List() { ... }

   public int size() { return numItems; }
   public boolean isEmpty() { return first==last; }

   public void add (int data) { ... }
   public void insertAfter (Listnode cur, int data) { ... }
   public void remove (Listnode cur) { ... }
   public Listnode get (int pos) { ... }
   public boolean contains (int data) { ... }
}
```

isEmpty ist nur korrekt, wenn ein Header-Knoten vorhanden ist.

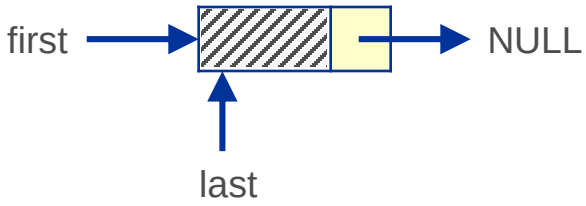
first, last



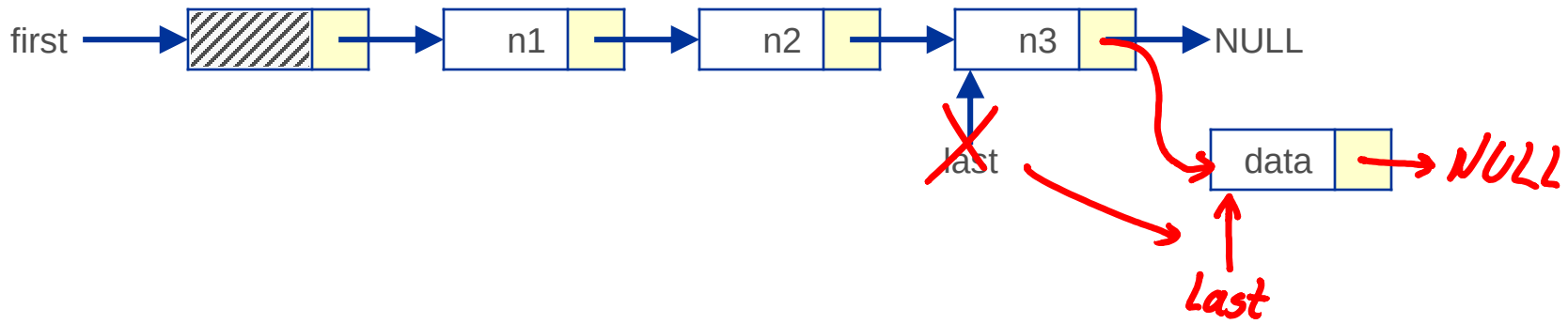
- First zeigt auf das erste Element, last auf das letzte.
- Last erlaubt Einfügen von Elementen am Ende in O(1), Liste muss nicht durchlaufen werden.
- Last muss durch alle Operationen aktuell gehalten werden.

Konstruktur (mit Header-Knoten)

```
public List ()
{
    first = last = new Listnode(null);
    numItems = 0;
}
```



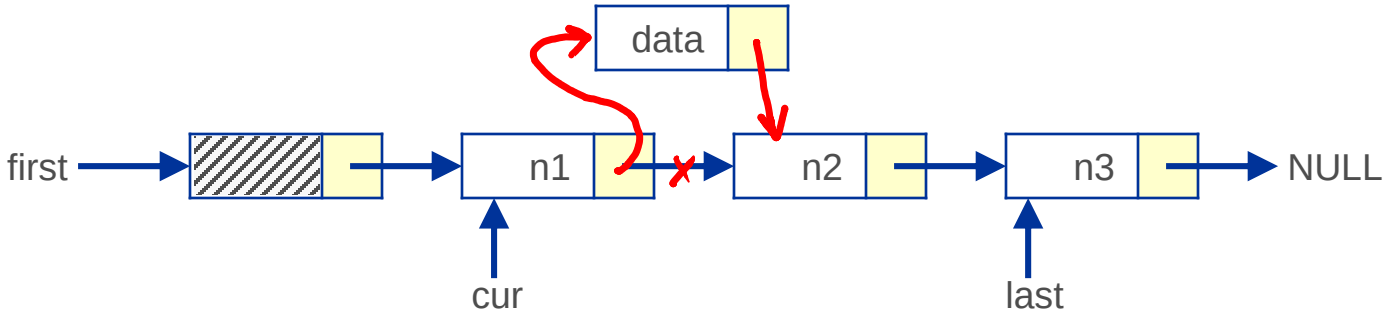
Einfügen am Ende der Liste




```
public void add (int data)
{
    last.setNext( new Listnode(data) );
    last = last.getNext();
    numItems++;
}
```

Durchlaufen der Liste wird durch last-Zeiger vermieden.
last-Zeiger und Zahl der Elemente numItems müssen aktualisiert werden.

Einfügen hinter cur



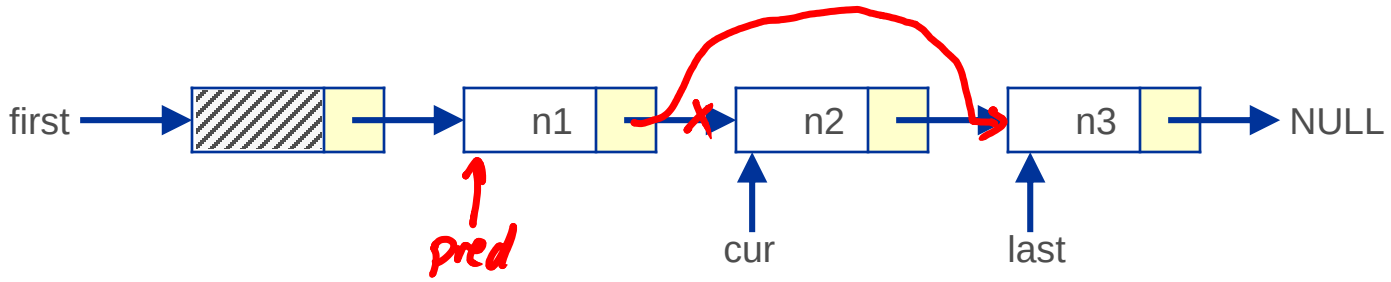

```
public void insertAfter(Listnode cur, int data)
{
    if (cur == last) add(data);
    else
    {
        cur.setNext(new Listnode(data,cur.getNext()));
        numItems++;
    }
}
```

Füge am Ende ein.

first wird nicht verändert, da first auf den Header-Knoten zeigt.

last wird nicht verändert, da nicht am Ende eingefügt wird.

Löschen von Element cur




```
public void remove (Listnode cur)
{
    Listnode pred = first;
    while (pred.getNext() != cur)
        pred = pred.getNext();

    pred.setNext(cur.getNext());

    numItems--;
    if (pred.getNext()==null) last=pred;
    (in C++ hier löschen des Elements cur)   delete (cur);
}
```

Finde den Vorgänger des Elementes cur: O(n)

Referenz auf Element an Position pos

- ```
  public Listnode get(int pos)
  {
     if (pos < 1 || pos > numItems)
        return null;

     Listnode cur = first;
     for (int k=0; k<pos; k++)
        cur = cur.getNext();

     return cur;
  }
  ```

Laufe durch die Liste bis Position pos.
  ```

Suchen eines Elements

```
public boolean contains(int data)
{
   Listnode cur = first;

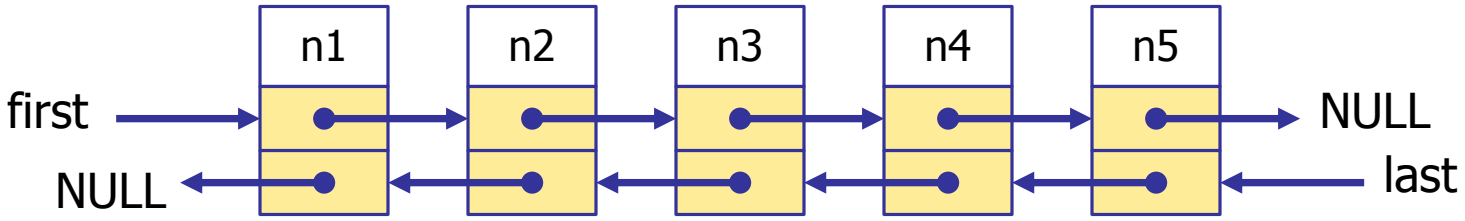
   for (int k=0; k<numItems; k++)
   {
      cur = cur.getNext();
      if (cur.getData() == data) return true;
   }

   return false;
}
```

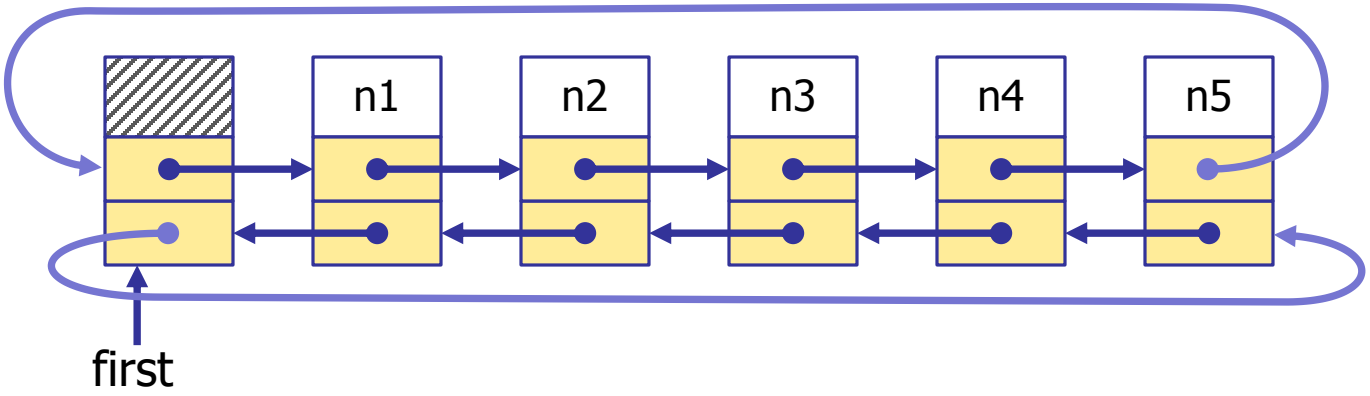
Erstes Element ist der Header, kein Element unserer Liste.

Laufzeiten einfach verkettete Liste

- next in Zeit $O(1)$
- previous in Zeit bis zu $\Theta(n)$
- insert in Zeit $O(1)$
- remove in Zeit bis zu $\Theta(n)$
- lookup in Zeit bis zu $\Theta(n)$
- Das geht besser mit doppelt verketteten Listen
  - Jedes Element hat einen Zeiger auf den Nachfolger **und Vorgänger**



Doppelt verkettete Liste



- Auch hier ist es geschickt, ein Header-Element anzulegen, um Sonderfälle zu vermeiden
- Durch zyklische Verbindung reicht ein Header-Element aus

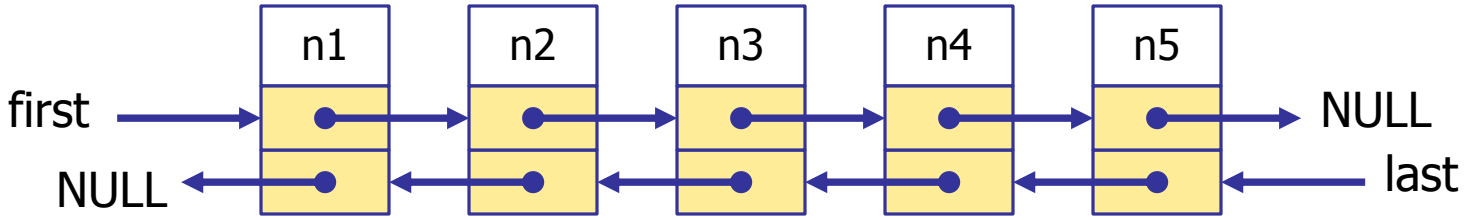
Lösung 3 (nicht gut): Verkettete Listen

UNI FREIBURG

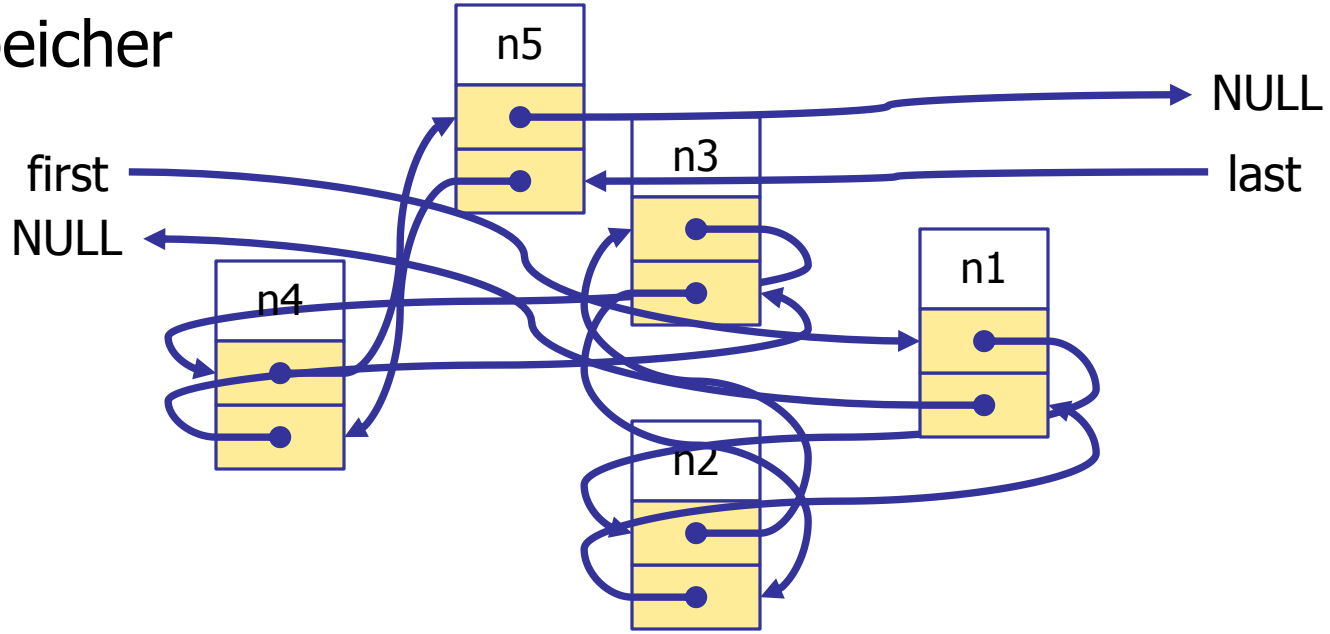
- Mit einer doppelt verketteten Liste bekommt man
  - next und previous in Zeit $O(1)$
    - jedes Element hat einen Zeiger zum Vorgänger / Nachfolger
  - insert und remove in Zeit $O(1)$
    - es müssen nur konstant viele Zeiger umgesetzt werden
  - lookup in Zeit bis zu $\Theta(n)$
    - Selbst wenn die Elemente in der Liste sortiert wären, könnte man sie nur in Zeit $\Theta(n)$ finden – warum?

Listen im realen Programm

Liste im Lehrbuch:



Liste im realen Programm: Die Elemente stehen irgendwo im Speicher



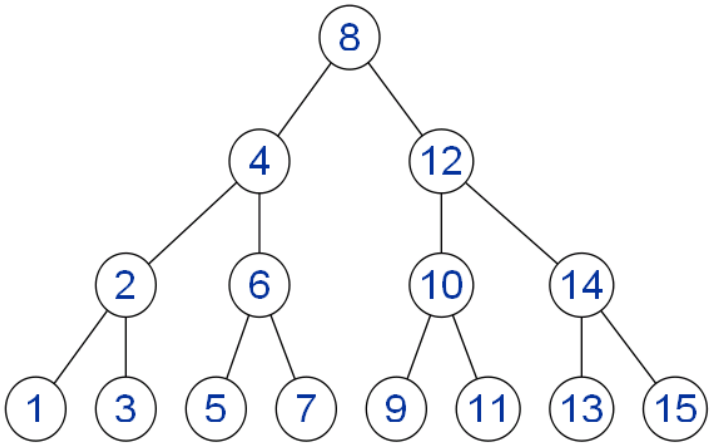
Lösung 4 (gut): Suchbäume

UNI FREIBURG

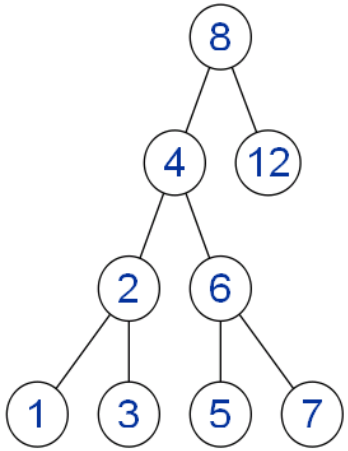
- Mit einem geeigneten Suchbaum bekommt man
  - next und previous in Zeit O(1)
    - entsprechende Zeiger wie bei der verketteten Liste
  - insert und remove in Zeit O(log n)
    - Sehen wir gleich, warum
  - lookup in Zeit O(log n)
    - eine Baumstruktur hilft jetzt beim effizienten Suchen

Binäre Suchbäume — Idee

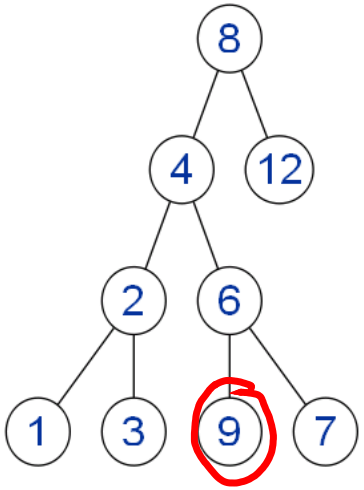
- Anordnung komplett sortiert: Für jeden Knoten gilt:
  - alle Elemente im linken Unterbaum haben einen kleineren Key
  - alle Elemente im rechten Unterbaum haben einen größeren Key



binärer Suchbaum



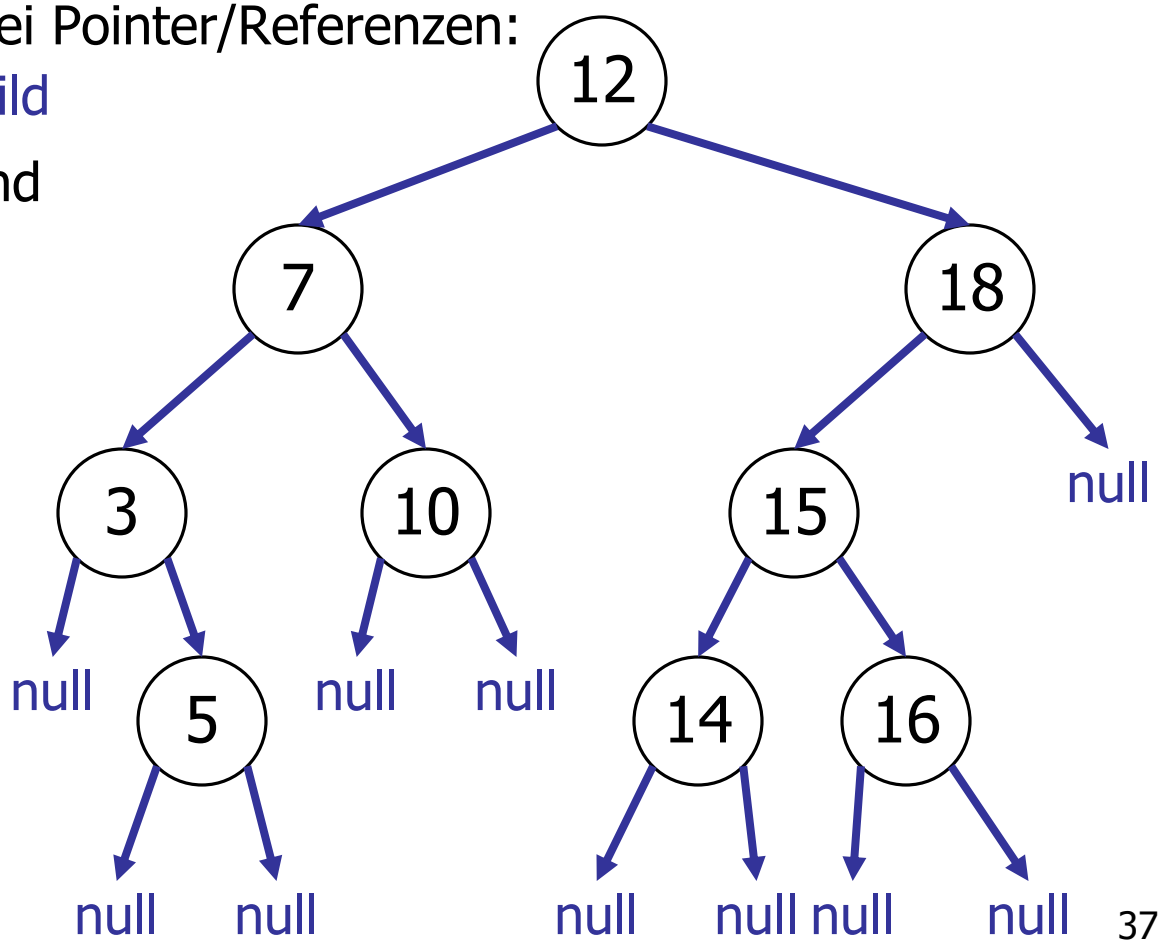
binärer Suchbaum



kein binärer Suchbaum

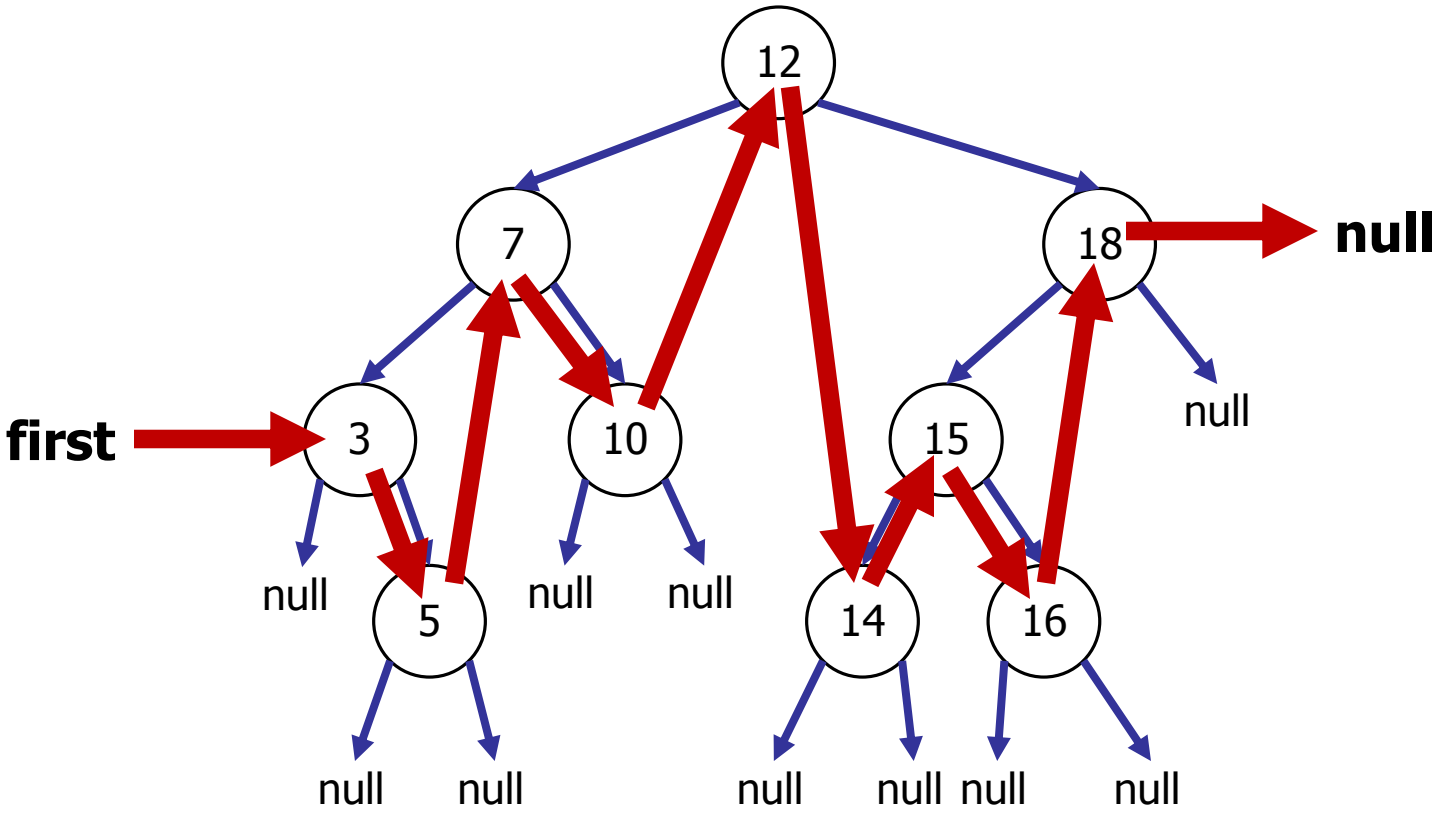
Implementierung

- Für den Heap hatten wir alle Knoten in einem Array gespeichert.
- Hier jetzt mit Pointern/Referenzen wie bei den verketteten Listen:
- Jeder Knoten hat zwei Pointer/Referenzen: leftChild und rightChild
- null für fehlendes Kind



Binäre Suchbäume — Idee

- Für effiziente Implementierung von next / previous
  - **gleichzeitig** eine doppelt verkettete Liste der Elemente (hier sind nur die Vorwärtspointer dargestellt)
  - die können Sie für's Übungsblatt aber weglassen!



Binäre Suchbäume — Lookup

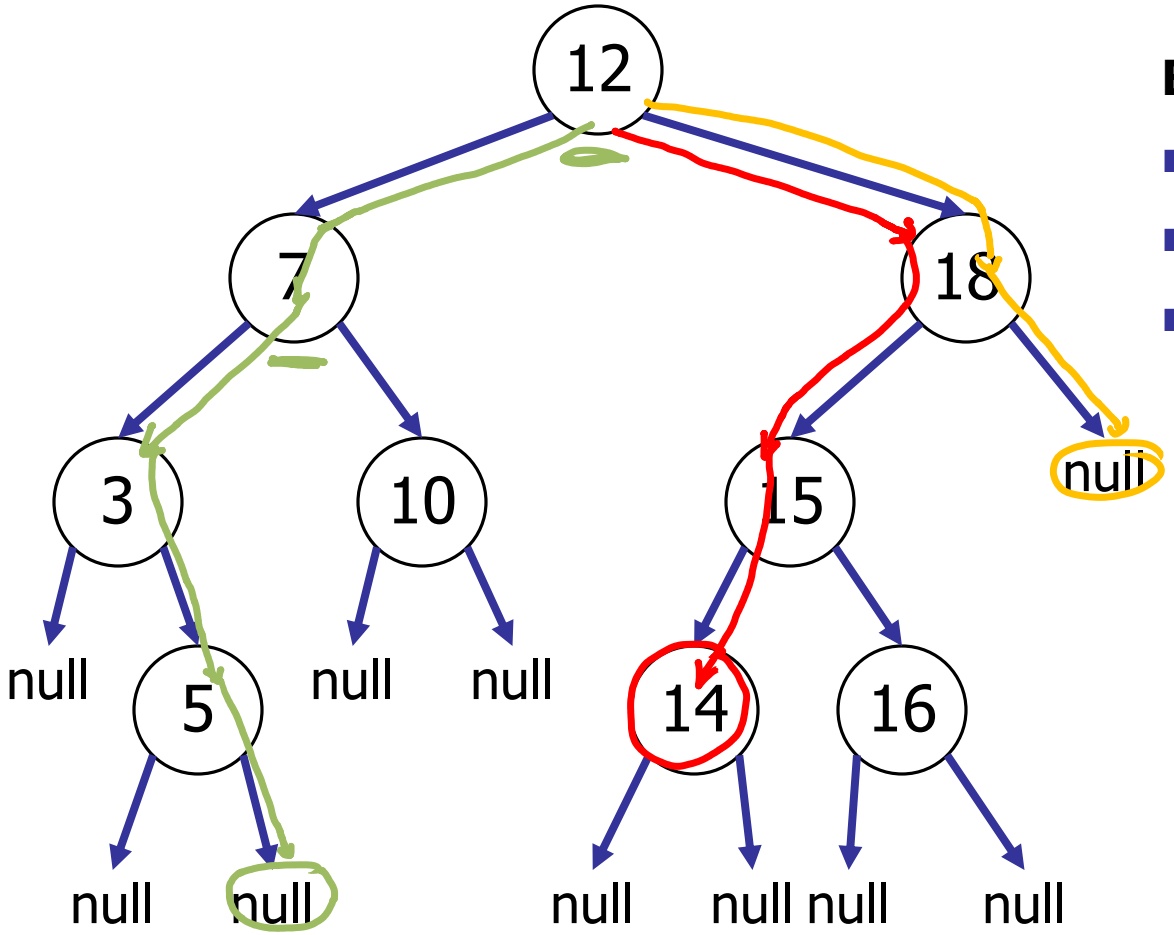
UNI FREIBURG

- Definition lookup(key) war:
  - finde das Element mit dem gegebenen Key; falls es das nicht gibt, finde das Element mit dem kleinsten Key der > key ist
- Wir suchen einfach von der Wurzel abwärts
  - und gehen je nach Key links oder rechts
  - und merken uns dabei immer den **letzten** Knoten, an dem wir nach **links** gegangen sind **...** warum?

lookup

An jedem Knoten gilt:

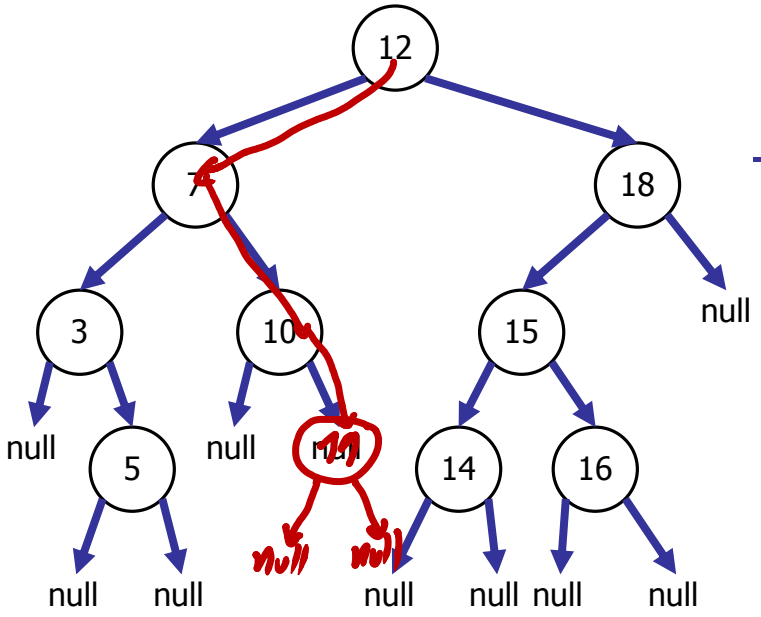
Alle Schlüssel im linken Teilbaum < Knoten.Schlüssel < alle Schlüssel im rechten Teilbaum



Beispiele

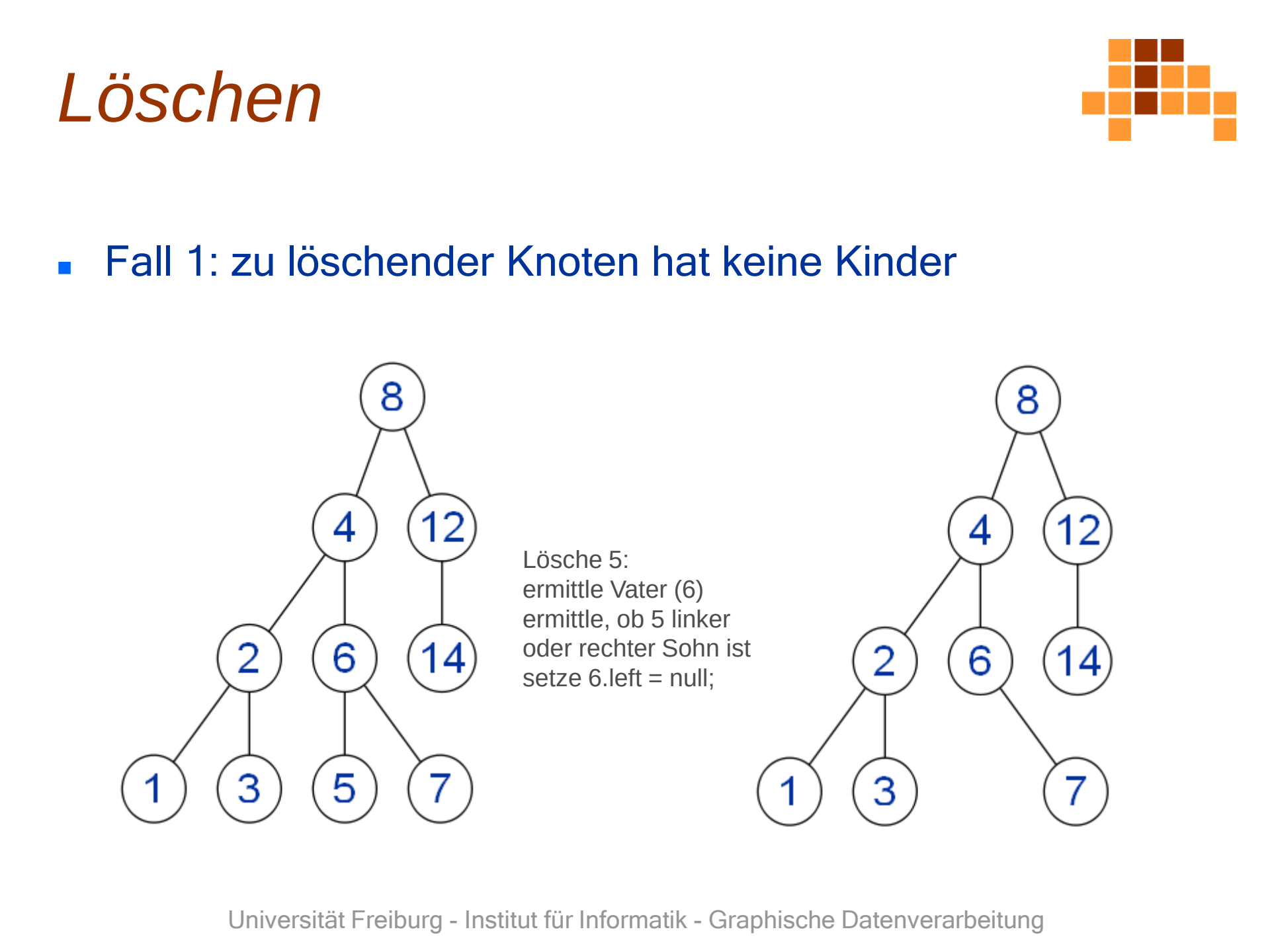
- lookup(14)
- lookup(6)
- lookup(19)

Binäre Suchbäume — Einfügen



- Wir suchen erstmal den gegebenen Key
  - Wenn wir ihn gefunden haben, überschreiben wir einfach den Value an dem Knoten
  - Sonst fügen wir an geeigneter Stelle einen neuen Knoten ein
    - Wenn es den Key im Baum noch nicht gab, kommen wir an einen null-pointer
    - Genau dort müssen wir den neuen Knoten einfügen
    - Z.B. insert(11)

Löschen

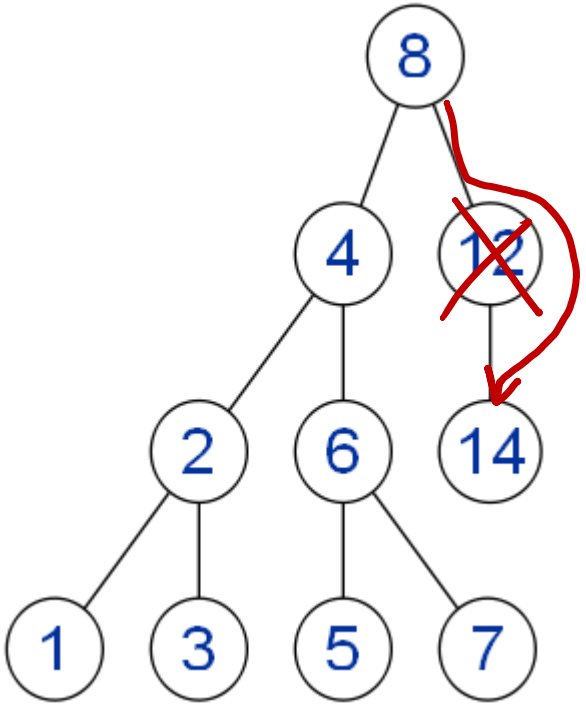


- Fall 1: zu löschender Knoten hat keine Kinder

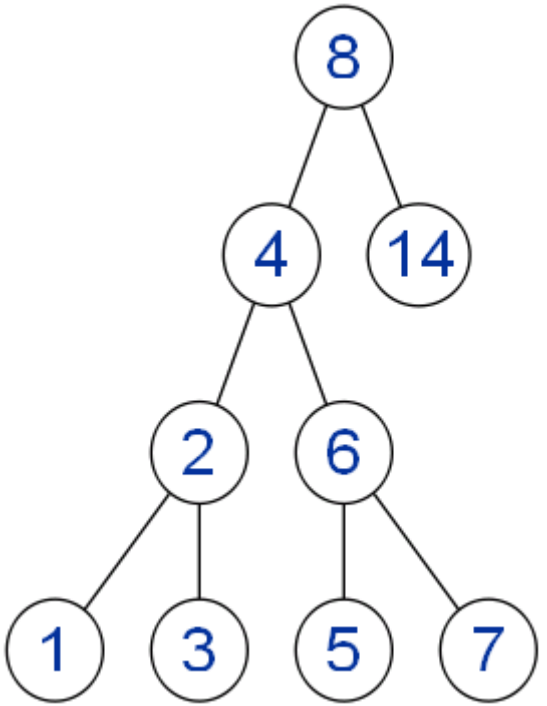
Lösche 5:
ermittle Vater (6)
ermittle, ob 5 linker
oder rechter Sohn ist
setze 6.left = null;

Löschen

- Fall 2: zu löschender Knoten hat ein Kind

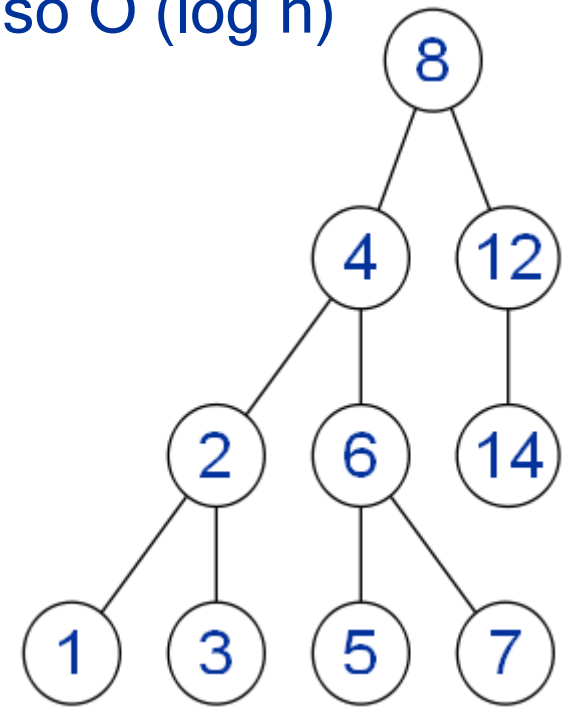


Lösche 12:
ermittle Sohn (14)
ermittle Vater (8)
ermittle, ob 12 linker oder rechter Sohn ist
setze 8.right = 14;

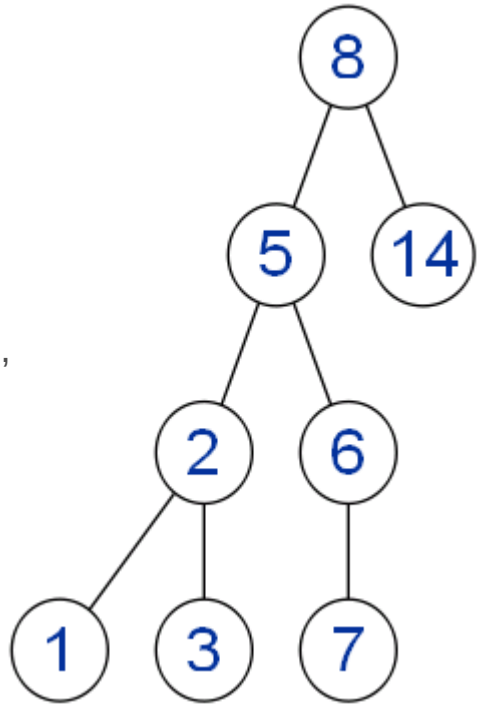


Löschen

- Fall 3: zu löschender Knoten hat zwei Kinder
- Laufzeit ergibt sich aus Laufzeit für `successor`, also O (log n)

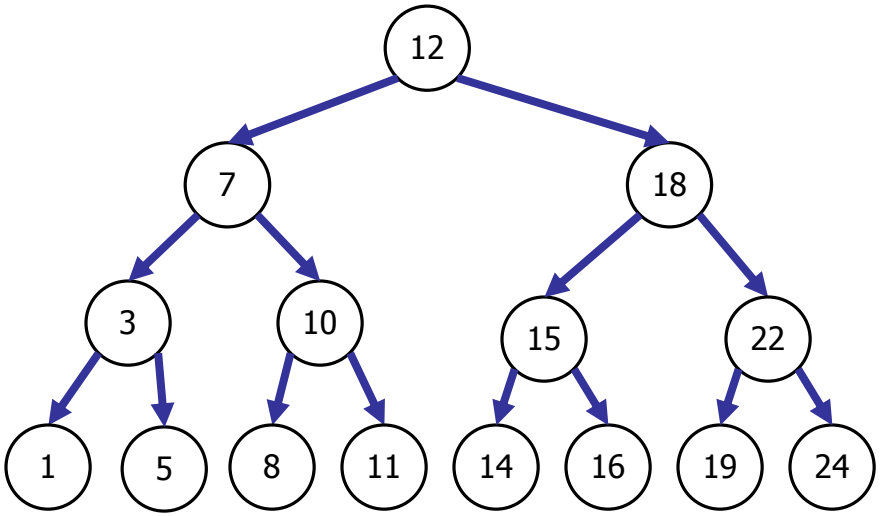


Lösche 4:
ermittle successor(4) = 5
ersetze 4 durch 5
lösche 5 (Fall 1 oder Fall 2, da 5 als Nachfolger von 4 keinen linken Sohn haben kann.

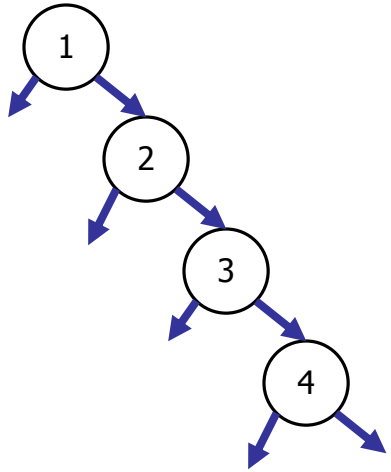


Binäre Suchbäume — Komplexität

- Wie lange dauern insert und lookup ?
  - Bis zu Zeit $\Theta(d)$, wobei d die Tiefe des Baumes ist = die größte Tiefe eines Blattes
  - Im besten Fall ist das $\Theta(\log n)$, im schlechtesten Fall aber $\Theta(n)$, wobei n die Anzahl der Knoten im Baum ist
  - Wenn man **immer** $\Theta(\log n)$ will, muss man den Baum gelegentlich **rebalancieren** → nächste Vorlesung



Vollst. Baum: $d = O(\log n)$



Entart. Baum: $d = n$

Übungsblatt 10

UNI FREIBURG

- Wichtig: Jetzt wieder eine Woche Bearbeitungszeit! Abgabe nächsten Donnerstag vor der Vorlesung
- 1) Implementierung eines binären Suchbaums mit
  - insert()
  - lookup()
- 2) Ausprobieren wie schnell die Suche ist, bei verschiedener Einfügereihenfolge der Elemente

Literatur / Links

- Suchbäume
  - In Mehlhorn/Sanders:

    7 Sorted Sequences
  - In Cormen/Leiserson/Rivest

    13 Binary Search Trees
  - In Wikipedia

    http://de.wikipedia.org/wiki/Binärer_Suchbaum

    http://en.wikipedia.org/wiki/Binary_search_tree
  - In Java / C++
    - die java.util.TreeMap und die std::map sind typischerweise mit (balancierten) Suchbäumen implementiert