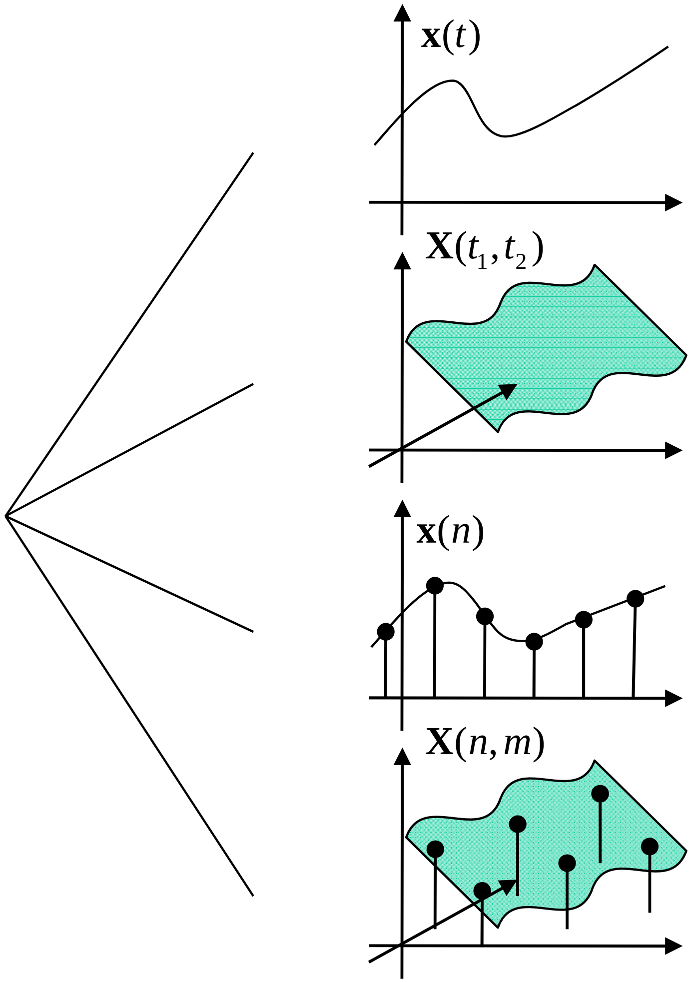
2. Darstellung von Signalen und Bildern in linearen Vektorräumen

Kontinuierliche oder diskrete Signale und Bilder lassen sich sehr einheitlich in ***linearen Vektorräumen*** darstellen.

$\mathbf{x}$



$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \int \mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)dt$ 1D, kontinuierlich

$\langle \mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle = \iint \mathbf{X}(t_1,t_2)\mathbf{Y}(t_1,t_2)dt_1dt_2$ 2D, kontinuierlich

$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \sum x_i y_i$ 1D, diskret

$\langle \mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle = \sum\sum X_{ij}Y_{ij}$ 2D, diskret

Vorteile der Einbettung in Vektorräume

- Einheitliche Beschreibung von kontinuierlichen, diskreten, ein- und mehrdimensionalen Signalen mit Begriffen in Vektorräumen
- Einheitliche Beschreibung mit Skalarprodukt $< , >$ anstatt mit $\int\int\int$ und mit $\sum\sum\sum$
- Ähnlichkeiten von Funktionenräumen $\{x_i(t)\}$ und Euklidschen Vektorräumen $\{\mathbf{x}_i\}$ und damit einfache geometrische Interpretation und Veranschaulichung (Zeit- oder Ortsfunktionen sind einfach Elemente eines geeignet gewählten Vektorraums)

Lineare Vektorräume

Lineare Vektorräume sind durch folgende Axiome erklärt:

I) Die Addition ist erklärt:

a) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$: $\quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad \in \mathcal{X}$ (kommutativ)

b) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X}$: $\quad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (assoziativ)

c) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}: \exists \mathbf{0} \in \mathcal{X}$: $\quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (es existiert ein Nullelement)

d) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}: \exists (-\mathbf{x}) \in \mathcal{X}$: $\quad \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (negatives, zu "+" inverses Element)

II) Die Multiplikation mit einem Skalar α aus einem Zahlenkörper $\mathbb{K}$ ist erklärt:

a) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\quad \alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ (assoziativ)

b) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\quad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ (distributiv)

c) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ (distributiv)

d) $\exists\ 1 \in \mathbb{K}$: $\quad 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (Eins-Element)

Das Rechnen mit linearen Operatoren

Die Menge aller linearen Operatoren genügen selbst den Gesetzmäßigkeiten eines Vektorraums (Addition und Multiplikation mit einem skalaren Faktor)

Nimmt man zusätzlich die Komposition von Operatoren (oder das Produkt) $A \circ B$ (Hintereinanderausführung von B und A) hinzu, so erfüllen lineare Operatoren die Gesetzmäßigkeiten einer (i.a. nichtkommutativen) Algebra

Es gilt:

1a) $(A+B)x = Ax + Bx$ Addition

1b) $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$ skalare Multiplikation

2a) $A(BC) = (AB)C$ assoziativ

2b) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

2c) $A(B+C) = AB + AC$

2d) $(A+B)C = AC + BC$

2e) $BA \neq AB$ i.a. nicht kommutativ

Legendre-Polynome $P_i(t)$

Rekursion:

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t)$$

mit: $P_0(t) = 1$

$$\langle P_n, P_m \rangle = \frac{2}{2m+1}\delta_{nm}$$

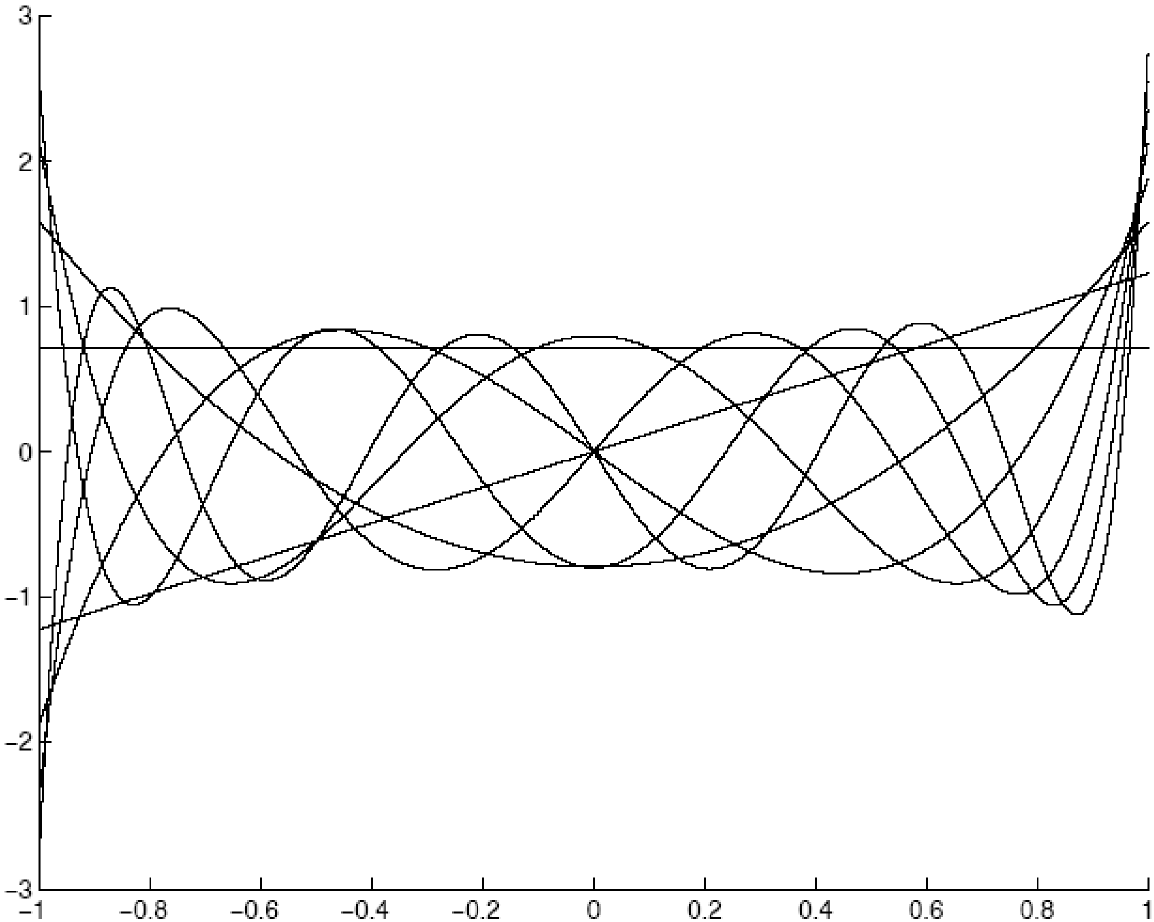
$$P_0(t) = 1$$
$$P_1(t) = t$$
$$P_2(t) = \tfrac{1}{2}(3t^2 - 1)$$
$$P_3(t) = \tfrac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$
$$P_4(t) = \tfrac{35}{8}t^4 - \tfrac{15}{4}t^2 + \tfrac{3}{8}$$
$$\vdots$$

normiert:

$$p_i(t) = \sqrt{\frac{2i+1}{2}}P_i(t) \qquad i = 0,1,2,\cdots$$

$$p_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad p_1(t) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}t \qquad p_2(t) = \sqrt{\tfrac{5}{8}}(3t^2 - 1)$$

es gilt: $P_n(t) = \dfrac{1}{2^n \cdot n!}\dfrac{d^n((t^2-1))}{dt^n}$



Verallgemeinerte Fourierreihe mit Polynomen

Bestapproximation der Funktion $x(t) = \sin(\frac{\pi}{2}(t+1))$ durch die Fourierreihe $y(t) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i \cdot l_i(t)$

mit: $\left\| x(t) - y(t) \right\|^2 = \left\| x(t) - \sum_{i=0}^{2} \alpha_i \cdot l_i(t) \right\|^2 \overset{!}{=}$ minimal

wobei l_0, l_1 ,l_2 die ersten drei Legendre-Polynome sind:

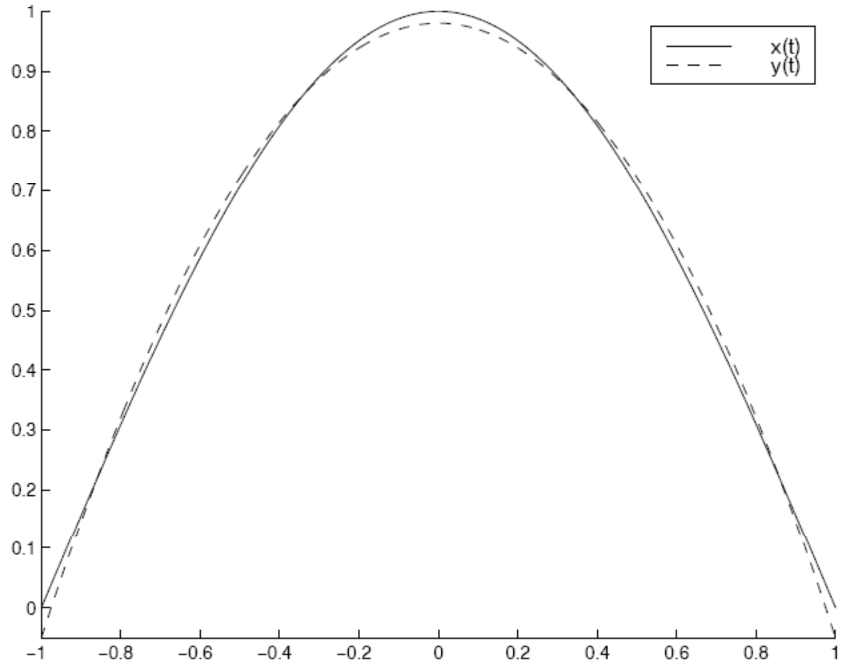
$$l_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad l_1(t) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}t \qquad l_2(t) = \sqrt{\tfrac{5}{8}}(3t^2 - 1)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\alpha_0 = \langle l_0(t), x(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \sin(\tfrac{\pi}{2}(t+1))dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4}{\pi}$$

$$\alpha_1 = \langle l_1(t), x(t) \rangle = 0$$

$$\alpha_0 = \langle l_0(t), x(t) \rangle = \sqrt{\tfrac{5}{8}}\,\tfrac{8}{\pi}(1 - \tfrac{12}{\pi^2})$$



und damit die Fourierreihe:

$$y(t) = \alpha_0 \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \alpha_1 \sqrt{\tfrac{3}{2}}t + \alpha_2 \sqrt{\tfrac{5}{8}}(3t^2 - 1) = \tfrac{2}{\pi} + \tfrac{5}{\pi}(1 - \tfrac{12}{\pi^2})(3t^2 - 1)$$

Matlab-Routine zur Berechnung der Pseudoinversen mit Hilfe der Singulärwertzerlegung

```
function X = pinv(A,tol)
%  PINV   Pseudoinverse.
%   X = PINV(A) produces a matrix X of the same dimensions
%   as A' so that A*X*A = A, X*A*X = X and A*X and X*A
%   are Hermitian. The computation is based on SVD(A) and any
%   singular values less than a tolerance are treated as zero.
%   The default tolerance is MAX(SIZE(A)) * NORM(A) * EPS.
%
%   PINV(A,TOL) uses the tolerance TOL instead of the default.
%   See also RANK.
%   Copyright 1984-2002 The MathWorks, Inc.
%   $Revision: 5.12 $  $Date: 2002/04/08 23:51:51 $

[U,S,V] = svd(A,0);
[m,n] = size(A);
if m > 1,
     s = diag(S);
elseif m == 1
     s = S(1);
else
   s = 0;
end
if nargin < 2
   tol = max(m,n) * max(s) * eps;
end
r = sum(s > tol);
if (r == 0)
     X = zeros(size(A'));
else
     s = diag(ones(r,1)./s(1:r));
     X = V(:,1:r)*s*U(:,1:r)';
end
```