

3. Signal- und Bildtransformationen

Bildtransformationen sind eine Repräsentation von Bildern in einem bestimmten Basissystem, welches für die Darstellung geeigneter sein kann als der Originalraum.

Anwendungen:

1. Bilddatenkompression (Bildkodierung)
2. Bildfilterung im Spektralbereich

Innenprodukt bei abgetasteten Bildern der Dimension $M \times N = 2^m \times 2^n$:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} A_{ij} \cdot B_{ij}^* = \text{spur}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*)$$

Gleichwertig wäre auch eine Formulierung mit eindimensionalen Vektoren, gebildet aus den gestapelten Zeilen einer Bildmatrix

Von dem Innenprodukt kann eine Norm abgeleitet werden:

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} A_{ij} \cdot A_{ij}^* = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} |A_{ij}|^2$$

Achtung: diese Norm hat jedoch nichts mit der Norm einer Matrix \mathbf{A} als linearer Operator zu tun! \mathbf{A} ist hier ein Vektorelement!

Andere Schreibweise für das Innenprodukt

Summe über das Produkt korrespondierender Elemente:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} A_{ij} \cdot B_{ij}^* = \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \circ \mathbf{B}^*) \mathbf{u}$$

mit:

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ direktes Produkt (elementweise)

$$\mathbf{u} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T$$

$\mathbf{C}\mathbf{u}$ Vektor mit Zeilensummen

$\mathbf{u}^T \mathbf{C}$ transp. Vektor mit Spaltensummen

Translation eines digitalen Bildes als *abgeschlossene* Operation auf einer endlichen Datenmenge

$$\mathbf{A}(k-p, l-r) = \mathbf{A}((k-p) \bmod M, (l-r) \bmod N)$$

Oder auch als zykl. Permutation der Zeilen und Spalten mit einer Permutationsmatrix:

$$\mathbf{A}(k-1, l-1) = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \quad \text{und:}$$

$$\mathbf{A}(k-p, l-r) = (\mathbf{P}^p)^T \mathbf{A} \mathbf{P}^r$$

z.B. für $N=4$: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mit: $\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$ und $\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$

Oder auch gewöhnliche Translation von periodisch fortgesetzten Bildern:

Dann gilt: $\mathbf{A}(k-M, l-N) = \mathbf{A}(k, l)$

Fouriertransformation für kontinuierliche Signale und Systeme

Neben vielen Darstellungsmöglichkeiten von Signalen mit orthogonalen Basisfunktionen nimmt das orthogonale System

$$\{\varphi_\nu\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi\nu t/T} \right\}$$

einen besonderen Platz ein. Das System ist vollständig in $L_2[0,T]$ und stellt Eigenfunktionen linearer zeitinvarianter Systeme (Systeme, welche mit lin. Dgln. mit konst. Koeff. beschreibbar sind) dar:

$$A\varphi_\nu = \lambda_\nu \varphi_\nu$$

Erregt man lineare Systeme mit ihren Eigenfunktionen, so bleibt das Signal am Ausgang bis auf einen komplexen Vorfaktor (Betrag u. Phase) unverändert.

Damit besitzen sie eine herausragende Stellung zur Charakterisierung linearer Systeme.

Fouriertransformation für kontinuierliche Signale und Systeme

Die $\{\varphi_v\}$ bilden die Basis für die spezielle Fourierreihe und das spezielle Fourierintegral und damit einer Transformation und Charakterisierung von Signalen vom Zeit- in den Frequenzbereich:

$$\mathcal{F}: L_2 \overbrace{(-\infty, +\infty)}^t \rightarrow L_2 \overbrace{(-\infty, +\infty)}^f$$

$$\tilde{x}(f) = c_1 \langle x(t), e^{+j2\pi ft} \rangle = c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{Hintransformation}$$

Die Abbildung ist bijektiv und somit existiert die inverse Transformation:

$$\mathcal{F}^{-1}: L_2 \overbrace{(-\infty, +\infty)}^f \rightarrow L_2 \overbrace{(-\infty, +\infty)}^t$$

$$x(t) = c_2 \langle \tilde{x}(f), e^{-j2\pi ft} \rangle = c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) e^{+j2\pi ft} df \quad \text{Rücktransformation}$$

Eigenschaften von \mathcal{F}

\mathcal{F} ist eine unitäre Transformation:

$$\Rightarrow: \langle x(t), y(t) \rangle = \langle \tilde{x}(f), \tilde{y}(f) \rangle \quad \text{Erhaltung des Innenprodukts}$$

$x = y$:

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \|x(t)\|^2 = \langle \tilde{x}(f), \tilde{x}(f) \rangle = \|\tilde{x}(f)\|^2 \quad \begin{array}{l} \text{Energieerhaltung,} \\ \text{Parsevalsche} \\ \text{Gleichung} \end{array}$$

ausgeschrieben:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) \cdot \tilde{y}^*(f) df$$

$$x = y: \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(f)|^2 df$$

Unterschiedliche Definitionen der Fouriertransformation

(je nach Wahl von c_1 und c_2)

$$\text{I) } \tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \langle x(t), e^{+j2\pi ft} \rangle$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) e^{+j2\pi ft} df = \langle \tilde{x}(f), e^{-j2\pi ft} \rangle$$

unitär: $\langle x(t), y(t) \rangle = \langle \tilde{x}(f), \tilde{y}(f) \rangle$

$$\text{II) } \tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \langle x(t), e^{+j\omega t} \rangle$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(\omega) e^{+j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{x}(\omega), e^{-j\omega t} \rangle$$

mit: $\omega = 2\pi f$

nicht unitär: $\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{x}(\omega), \tilde{y}(\omega) \rangle$

Unterschiedliche Definitionen der Fouriertransformation

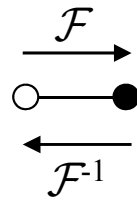
$$\text{III) } \tilde{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle x(t), e^{+j\omega t} \rangle$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(\omega) e^{+j\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \tilde{x}(\omega), e^{-j\omega t} \rangle$$

$$\text{unitär: } \langle x(t), y(t) \rangle = \langle \tilde{x}(\omega), \tilde{y}(\omega) \rangle$$

$$\boxed{\text{mit: } \omega = 2\pi f}$$

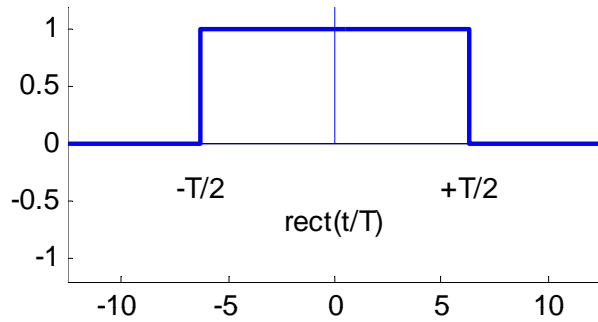
Fourierkorrespondenzen



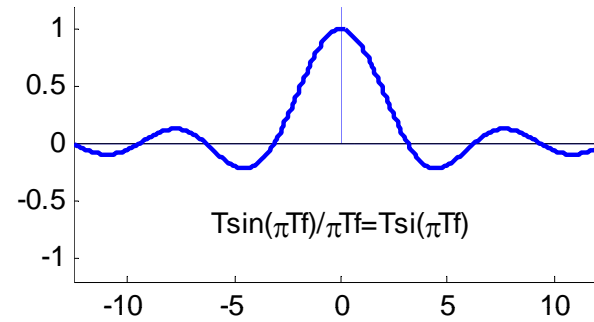
$x(t)$

$\tilde{x}(f)$

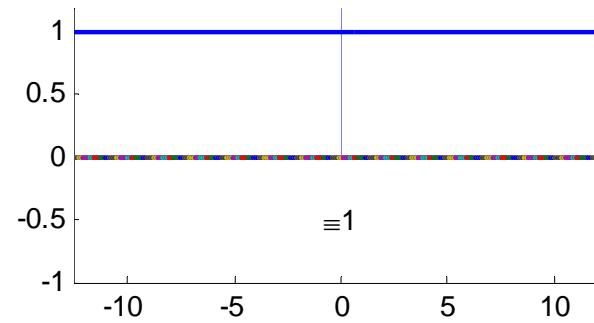
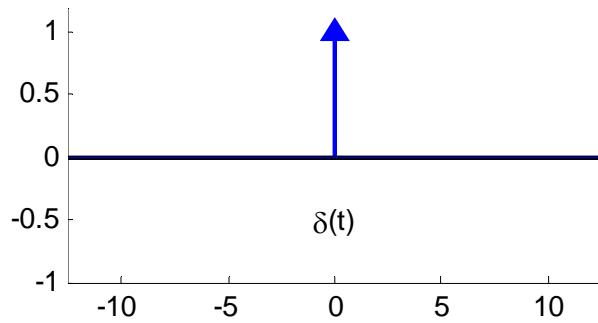
Rechteck-Impuls:



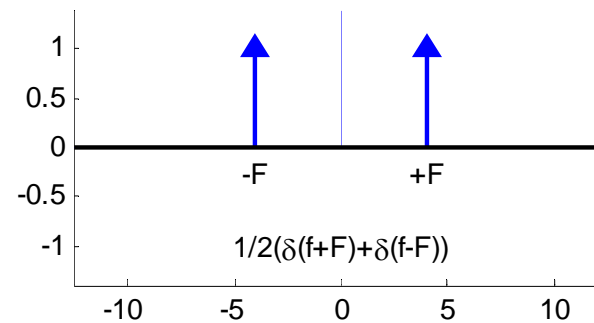
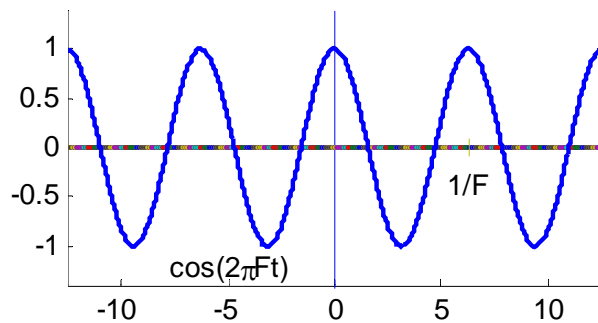
Spalt- oder si-Funktion:



Dirac-Impuls:

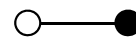


Cosinus:

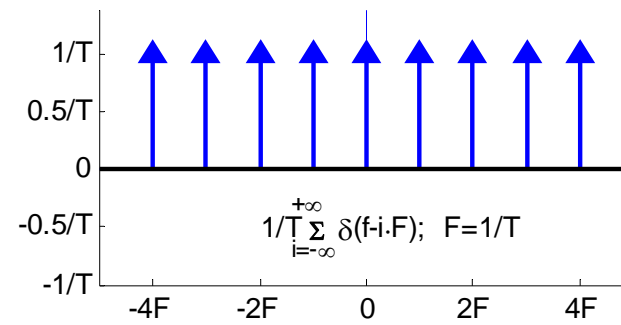
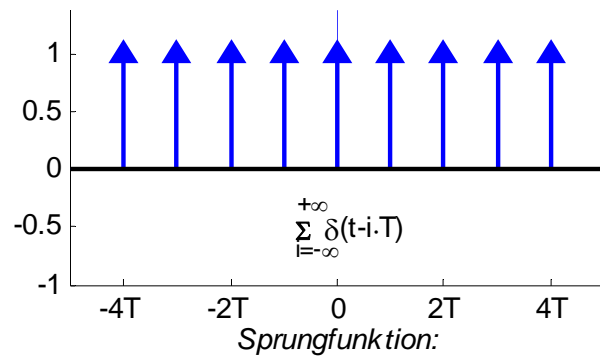
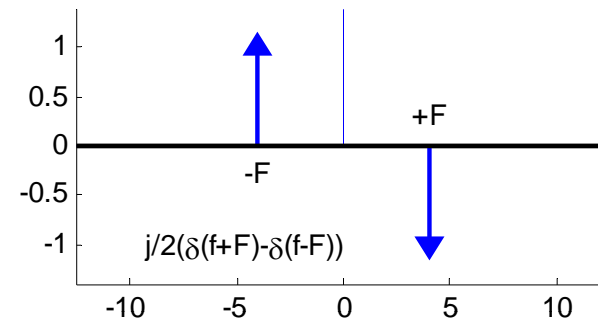
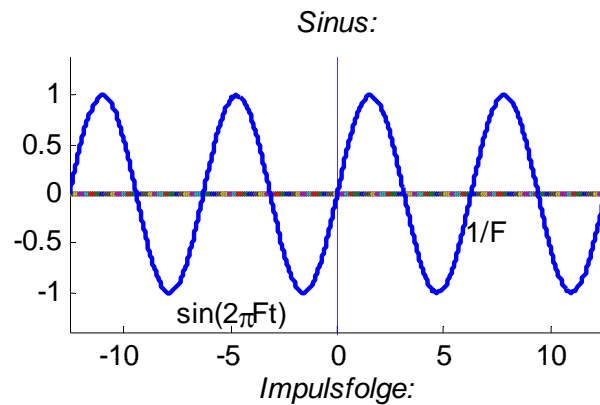


Fourierkorrespondenzen

$x(t)$



$\tilde{x}(f)$



$\pi\delta(2\pi f) + 1/j2\pi f$

Eigenschaften der Fouriertransformation

1) Linearität: $\overline{(a_1x_1 + a_2x_2)} = a_1\tilde{x}_1 + a_2\tilde{x}_2$



2) Symmetrie: $\tilde{x}(f = t) \Leftrightarrow x(t = -f) \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}(x(t))) = x(-t)$

3) Skalierung: $x(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{|k|} \tilde{x}(f/k)$

4) Verschiebung: $x(t - t_0) \Leftrightarrow \tilde{x}(f) \cdot e^{-j2\pi ft_0} ; t_0 \in \mathbb{R}$
(Translation)

5) Ableitungen: $x^{(n)}(t) \Leftrightarrow (j2\pi f)^n \cdot \tilde{x}(f)$

6) Modifizierte Form der Rücktransformation als Vorwärtstranf.:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{x}(f)) = (\mathcal{F}(\tilde{x}^*(f)))^*$$

Die Fouriertransformation ist zyklisch vom Grade vier

$$\mathcal{F}(x(t)) = \tilde{x}(f)$$

$$\mathcal{F}^2(x(t)) = \mathcal{F}(\tilde{x}(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) e^{-j2\pi ft} df = x(-t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^4(x(t)) = x(t) \Rightarrow \mathcal{F}^4 = I \text{ Einheitsoperator}$$

d.h. \mathcal{F} ist zyklisch vom Grade vier

$$\Rightarrow \mathcal{F}^3 = \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$$

Symmetrieeigenschaften von \mathcal{F}

Man bezeichnet:

$$\boxed{x_e(t) = x_e^*(-t)} \quad \text{konjugiert symmetrisch, reell: geradsymmetrisch (even)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\{x_e(t)\} = \operatorname{Re}\{x_e(-t)\} & \text{Realteil ist eine gerade Funktion} \\ \operatorname{Im}\{x_e(t)\} = -\operatorname{Im}\{x_e(-t)\} & \text{Imaginärteil ist eine ungerade Funktion} \end{cases}$$

$$\boxed{x_o(t) = -x_o^*(-t)} \quad \text{konjugiert antisymmetrisch, reell: schiefsymmetrisch (odd)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\{x_o(t)\} = -\operatorname{Re}\{x_o(-t)\} & \text{Realteil ist eine ungerade Funktion} \\ \operatorname{Im}\{x_o(t)\} = \operatorname{Im}\{x_o(-t)\} & \text{Imaginärteil ist eine gerade Funktion} \end{cases}$$

Jede Funktion lässt sich nun zerlegen in einen konj. symm. und einen konj. antisymm. Teil:

$$\boxed{x(t) = x_e(t) + x_o(t)}$$

mit:

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \left[x(t) + x^*(-t) \right]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \left[x(t) - x^*(-t) \right]$$

Man zeigt nun einfach, dass die Fouriertransformierte einer *reellen* Funktion *konjugiert symmetrisch* ist. Wegen der Linearität von \mathcal{F} gilt:

$$\overline{\operatorname{Re}\{x(t)\}} = \overline{\frac{1}{2}\{x(t) + x^*(t)\}} = \frac{1}{2}\{\tilde{x}(f) + \tilde{x}^*(-f)\} = \tilde{x}_e(f)$$

D.h. für reelle Funktionen gilt:

$\tilde{x}(f) = \tilde{x}^*(-f)$	konjugiert symmetrisch
$\operatorname{Re}\{\tilde{x}(f)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{x}(-f)\}$	gerade Funktion
$\operatorname{Im}\{\tilde{x}(f)\} = -\operatorname{Im}\{\tilde{x}(-f)\}$	ungerade Funktion

Ebenso zeigt man, dass die Fouriertransformierte einer *imaginären* Funktion *konjugiert antisymmetrisch* ist:

$$\overline{j \operatorname{Im}\{x(t)\}} = \tilde{x}_o(f)$$

Es gelten folgende Korrespondenzen:

$$\begin{aligned}x(t) &\Leftrightarrow \tilde{x}(f) \\x^*(t) &\Leftrightarrow \tilde{x}^*(-f) \\x^*(-t) &\Leftrightarrow \tilde{x}^*(f) \\x(-t) &\Leftrightarrow \tilde{x}(-f)\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich nachfolgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\widetilde{x_e(t)} &= \operatorname{Re}\{\tilde{x}(f)\} && \text{die Fouriertransformierte einer konj. symm. Funktion ist reell.} \\ \widetilde{x_o(t)} &= j \operatorname{Im}\{\tilde{x}(f)\} && \text{die Fouriertransformierte einer konj. antisymm. Funktion ist} \\ &&& \text{imaginär.}\end{aligned}$$

Fouriertransformation für kontinuierliche Signale und Systeme in 2D

$$\mathcal{F}: L_2 \left(\overbrace{(-\infty, +\infty)}^{t_1, t_2} \right) \rightarrow L_2 \left(\overbrace{(-\infty, +\infty)}^{f_1, f_2} \right)$$

$$\tilde{X}(f_1, f_2) = c_1 \langle X(t_1, t_2), e^{+j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} \rangle = c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t_1, t_2) e^{-j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

Hintransformation

Die Abbildung ist bijektiv und somit existiert die inverse Transformation:

$$\mathcal{F}^{-1}: L_2 \left(\overbrace{(-\infty, +\infty)}^{f_1, f_2} \right) \rightarrow L_2 \left(\overbrace{(-\infty, +\infty)}^{t_1, t_2} \right)$$

$$X(t_1, t_2) = c_2 \langle \tilde{X}(f_1, f_2), e^{-j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} \rangle = c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(f_1, f_2) e^{+j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} df_1 df_2$$

Rücktransformation

$$\mathcal{F} \text{ ist unitär: } \langle X(t_1, t_2), Y(t_1, t_2) \rangle = \langle \tilde{X}(f_1, f_2), \tilde{Y}(f_1, f_2) \rangle$$

Abtasttheorem – Sampling Theorem

Claude Shannon (1949):

„If a function $f(t)$ contains no frequencies higher than W cps, it is completely determined by giving its ordinates at a series of points spaced $1/2W$ seconds apart“

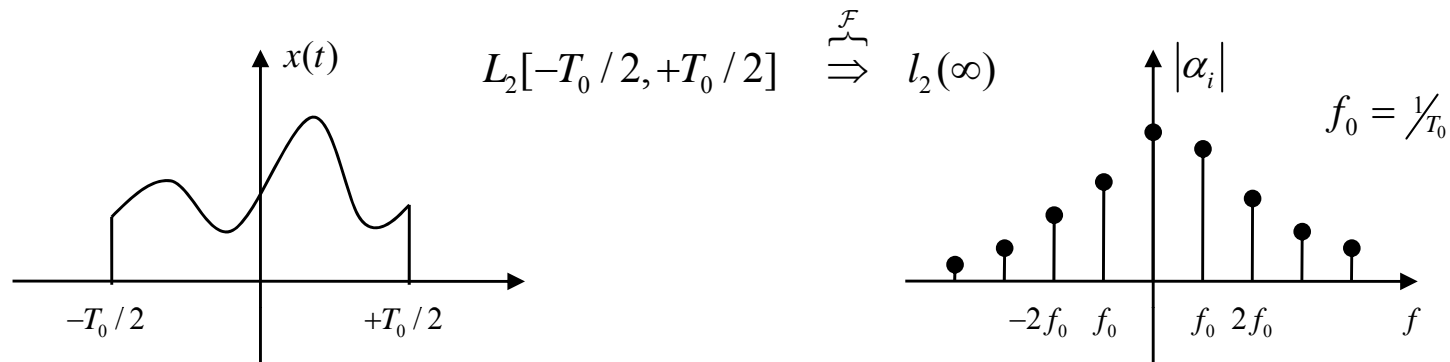
The function can simply be reconstructed from the samples by using a pulse of the type:

$$\frac{\sin 2\pi Wt}{2\pi Wt}$$

Earlier work by H. Nyquist (1924) and J.M. Whittaker (1935).

Fourierreihe

und Beziehung zur Fouriertransformation



Vollständige orthonormale Basis: $\left\{ e_i(t) = \sqrt{f_0} \cdot e^{j2\pi i f_0 t} \right\} \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$

Spezielle Fourierreihe: $x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = \sqrt{f_0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i e^{j2\pi i f_0 t}$

mit: $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle = \sqrt{f_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi i f_0 t} dt$

Für reelle Funktionen gilt: $\alpha_{-i} = \alpha_{+i}^*$
(siehe Symmetrieeigenschaften)

In Übereinstimmung mit der Literatur hier auch Fourierreihe mit nicht normierter Basis

Spezielle Fourierreihe:
$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha'_i e^{j2\pi f_0 t}$$

mit:
$$\alpha'_i = \frac{1}{T_0} \langle x, e^{+j2\pi f_0 t} \rangle = \sqrt{f_0} \cdot \alpha_i$$

und es gilt:
$$\langle x(t), x(t) \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = T_0 \langle \mathbf{a}', \mathbf{a}' \rangle$$

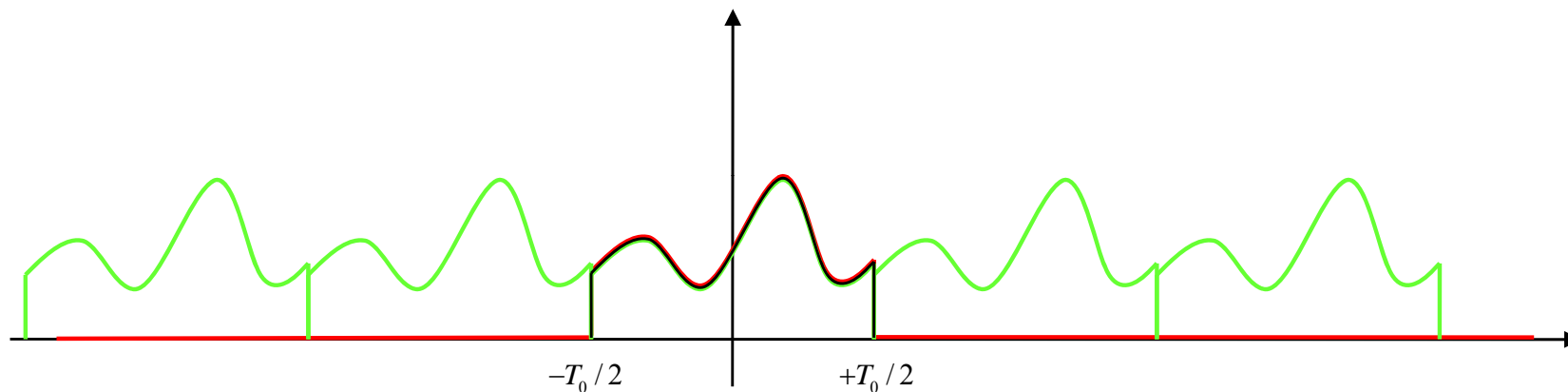
$$\Rightarrow \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|^2 dt = T_0 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\alpha'_i|^2 \quad \text{Parseval}$$

Fehler bei endlichem N :
(Fehlervektor senkrecht auf Unterraum)

$$E = \|\mathbf{e}\|^2 = T_0 \sum_{|i|>N} |\alpha'_i|^2$$

Beziehung zwischen Fourierintegral und Fourierreihe

Interpretation von $x(t) \in L_2[a, b]$ in $L_2(-\infty, +\infty)$ durch 2 triviale Ergänzungen.



— $x_0(t) \equiv 0$ für $|t| > T_0/2$ mit Null fortsetzen

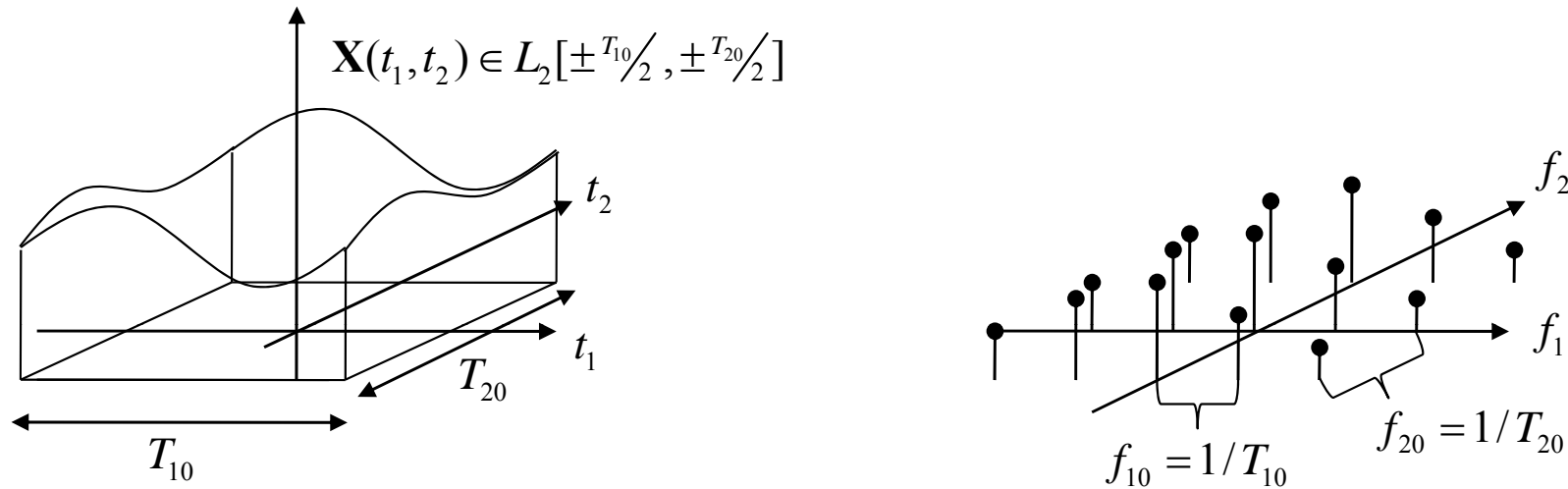
— $x_p(t \pm iT_0) = x_p(t)$ $t \in [-T_0/2, +T_0/2]$ periodische Fortsetzung

In beiden Fällen gilt jedoch:

Bei Kenntnis von $x(t)$ für $|t| \leq T_0/2$ ist die Funktion auch über $-\infty, +\infty$ vollständig definiert (triviale Fortsetzung, mit Null oder periodisch).

Deshalb muss es auch einen Zusammenhang im Spektralbereich geben!

Fourierreihe für zweidimensionale *kontinuierliche* Funktionen



$$\mathbf{X}(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\langle \mathbf{X}(t_1, t_2), \mathbf{F}_{kl}(t_1, t_2) \rangle}_{\text{Fourierkoeff. } \tilde{X}_{kl}} \cdot \mathbf{F}_{kl}(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\widetilde{X}_{kl}}_{FK} \cdot \mathbf{F}_{kl}$$

Orthogonale Basisfunktionen mit separierbarem Kern:

$$\mathbf{F}_{kl}(t_1, t_2) = c e^{j2\pi((k f_{10} t_1 + l f_{20} t_2))} = c e^{j2\pi k f_{10} t_1} e^{j2\pi l f_{20} t_2}$$

$\mathbf{X}(t_1, t_2)$ definiert im endlichen Intervall \Rightarrow diskretes Spektrum, d.h. vollständiges Funktionensystem durch Basisfunktionen im Frequenzabstand: $k \cdot f_{10} + l \cdot f_{20}$

Endliche allgemeine Fourierreihe für zweidimensionale *diskrete* Funktionen (z.B. Bildmatrizen)

$$\mathcal{F}: \mathbb{C}^{M \times N} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times N}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \langle \mathbf{A}, \mathbf{F}_{kl} \rangle \mathbf{F}_{kl} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \underbrace{\widetilde{A}_{kl}}_{FK} \cdot \mathbf{F}_{kl} \quad (\text{I})$$

$$\text{FK: } \widetilde{A}_{qr} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{F}_{qr} \rangle \quad (\text{II})$$

Basisfunktionen orthonormal:

$$\langle \mathbf{F}_{kl}, \mathbf{F}_{qr} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = q, l = r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\dim \mathbf{F}_{kl} = \dim \mathbf{A} = M \times N = 2^m \times 2^n$$

Endliche zweidimensionale Transformationen mit separierbarem Kern

Gl. II ausgeschrieben lautet:

$$\tilde{A}(q, r) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} A(k, l) \cdot F^*(k, l, q, r) \quad (\text{II}')$$

Falls Kern F separierbar:

$$F(k, l, q, r) = u(k, q) \cdot v(l, r)$$

Kern außerdem *symmetrisch*, falls: $w=u=v$, d.h. beide Funktionen gleich!

$$\Rightarrow \tilde{A}(q, r) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-1} \left(\underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} A(k, l) \cdot v^*(l, r)}_{\text{zeilenweise Addition}} \right)}_{\text{spaltenweise Addition}} \cdot u^*(k, q)$$

Beispiel für die allgemeine Fouriertransformation einer Bildmatrix \mathbf{A} der Dimension 2×4

z. B.: $M \times N = 2 \times 4$

$$\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}}_{00} \cdot \mathbf{F}_{00} + \widetilde{\mathbf{A}}_{01} \cdot \mathbf{F}_{01} + \widetilde{\mathbf{A}}_{02} \cdot \mathbf{F}_{02} + \widetilde{\mathbf{A}}_{03} \cdot \mathbf{F}_{03} + \\ \widetilde{\mathbf{A}}_{10} \cdot \mathbf{F}_{10} + \widetilde{\mathbf{A}}_{11} \cdot \mathbf{F}_{11} + \widetilde{\mathbf{A}}_{12} \cdot \mathbf{F}_{12} + \widetilde{\mathbf{A}}_{13} \cdot \mathbf{F}_{13}$$

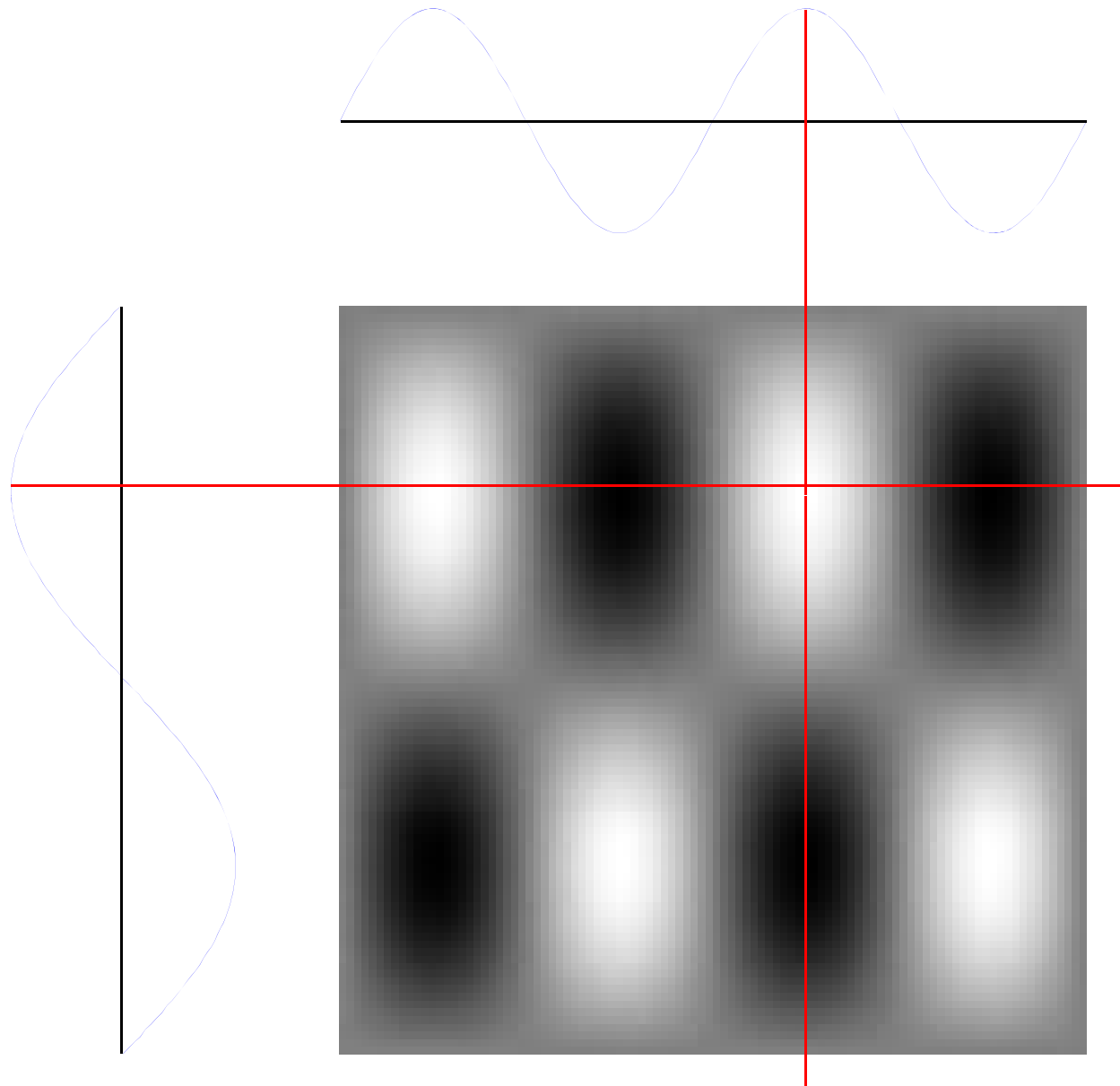
Beispiel für die *spezielle* Fouriertransformation einer Bildmatrix \mathbf{A} der Dimension 2×4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (0,0) & (6,0) & (3,0) & (2,0) \\ (3,0) & (7,0) & (8,0) & (5,0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (-1,0) \end{bmatrix}^* \quad \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} (1,0) & (1,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (-1,0) & (0,-1) \\ (1,0) & (-1,0) & (1,0) & (-1,0) \\ (1,0) & (0,-1) & (-1,0) & (0,1) \end{bmatrix}^*$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{F}_2^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} (34,0) & (-8,6) & (-6,0) & (-8,-6) \\ (-12,0) & (2,2) & (-4,0) & (2,-2) \end{bmatrix}^*$$

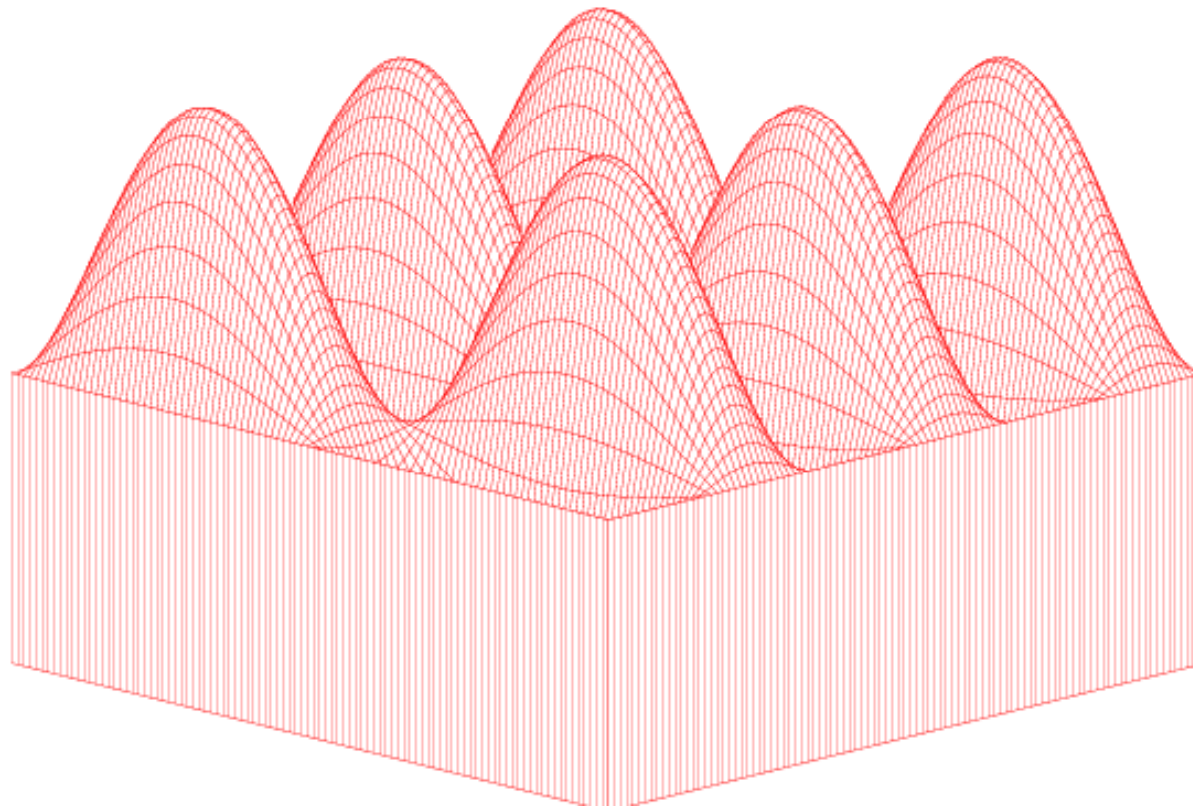
2D-Fourier-Basis



Berechnung von zweidimensionalen Fourierbasisfunktionen mit Hilfe des Aussenproduktes (Basisfunktionen mit separierbarem Kern)

$$\mathbf{F}_{kl}(t_1, t_2) = ce^{j2\pi((kf_{10}t_1 + lf_{20}t_2))} = ce^{j2\pi kf_{10}t_1} e^{j2\pi lf_{20}t_2}$$

2D-Funktionen mit separierbarem Kern



Walsh-Funktionen

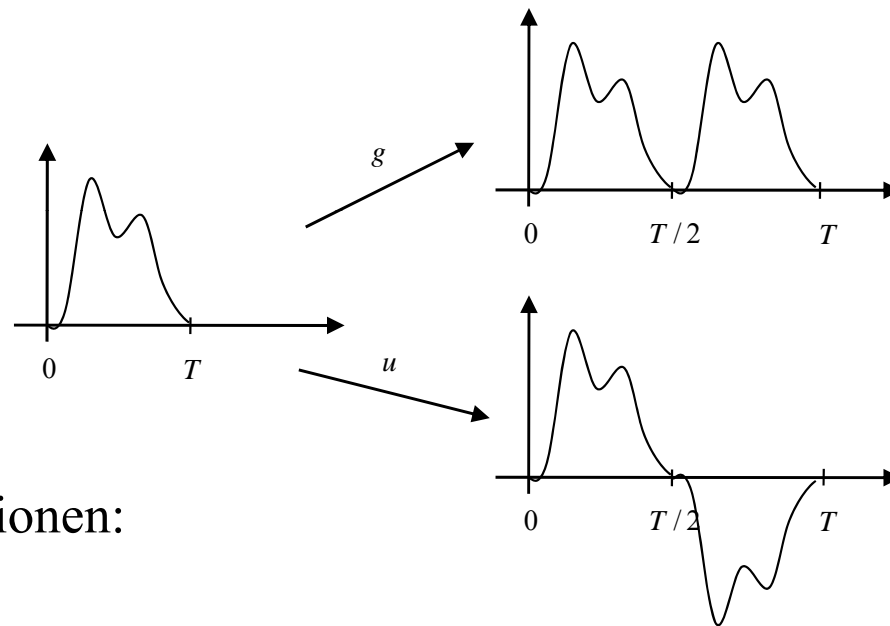
Zunächst Definition der kontinuierlichen Funktionen, dann Walsh-Transformation, Walsh-Reihen, diskrete Walsh-Transformation (DWT)

Mit:

$$gw(t) = w(2t) + w(2(t - T/2))$$

$$uw(t) = w(2t) - w(2(t - T/2))$$

g: auf die Hälfte stauchen u. gerade ergänzen
 u: auf die Hälfte stauchen u. ungerade ergänzen



Oder auch:

$$w_i(t) \Rightarrow \begin{cases} w_{2i} = g^i w_i \\ w_{2i+1} = u^i w_i \end{cases}$$

$$g^0 = g, g^1 = u, g^2 = g^0 = g$$

$$u^0 = u, u^1 = g, u^2 = u^0 = u$$

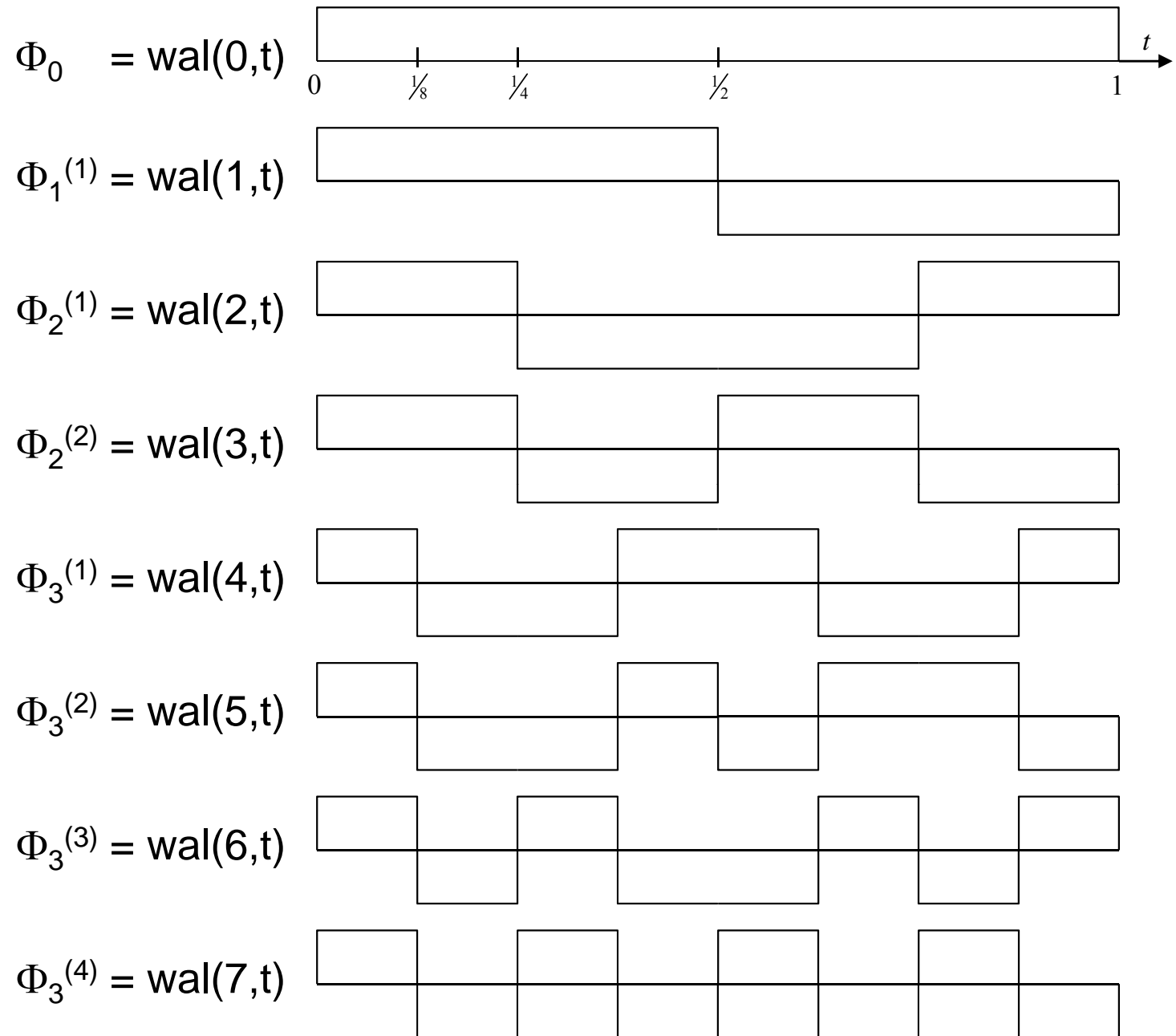
Rekursive Definition der Walsh-Funktionen:

$$\begin{aligned} w_0(t) &\equiv 1 & w_0(t) &= gw_0(t) \\ w_1(t) &= uw_0(t) \\ w_2(t) &= uw_1(t) \\ w_3(t) &= gw_1(t) \\ w_4(t) &= gw_2(t) \\ w_5(t) &= uw_2(t) \\ w_6(t) &= uw_3(t) \\ w_7(t) &= gw_3(t) \end{aligned}$$

Erzeugungsschema:

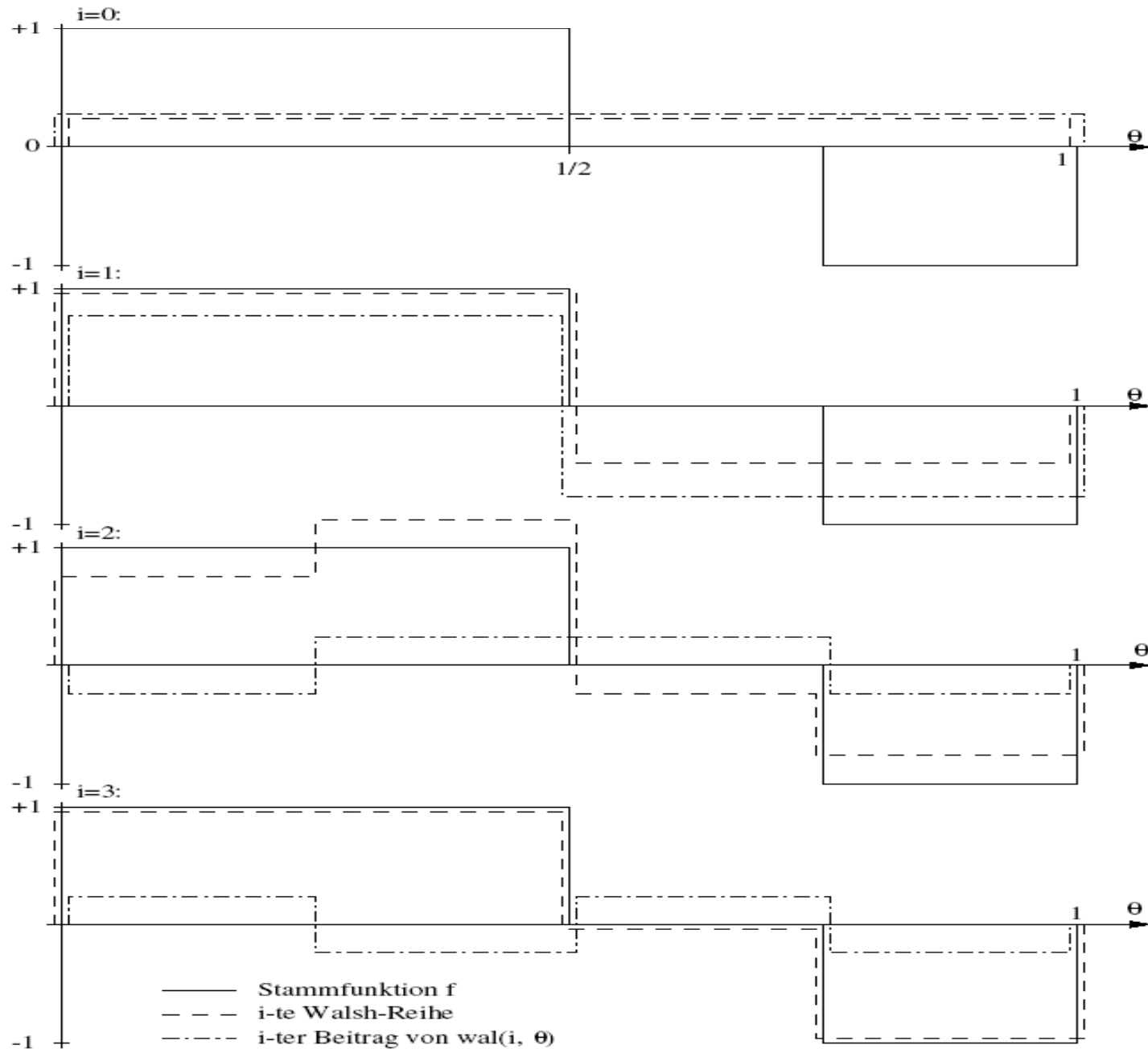
$$\Rightarrow w_i(t) \begin{cases} \text{für gerade } i : & \begin{cases} w_{2i} = gw_i \\ w_{2i+1} = uw_i \end{cases} \\ \text{für ungerade } i : & \begin{cases} w_{2i} = uw_i \\ w_{2i+1} = gw_i \end{cases} \end{cases}$$

Walsh- Funktionen



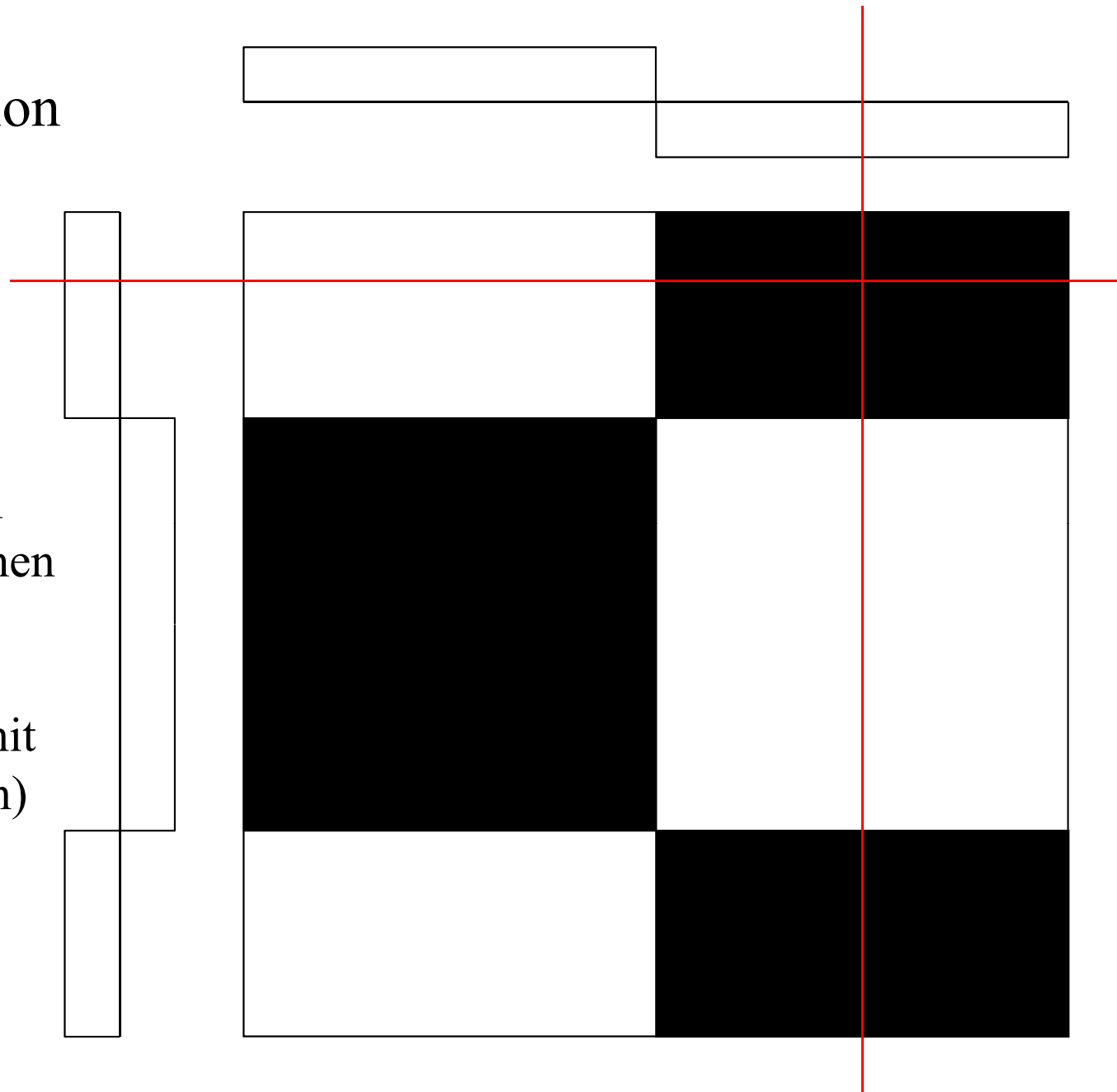
Walsh-Approximation für eine stückweise konstante Funktion

Konvergenz mit
einer Reihe mit
4 Elementen

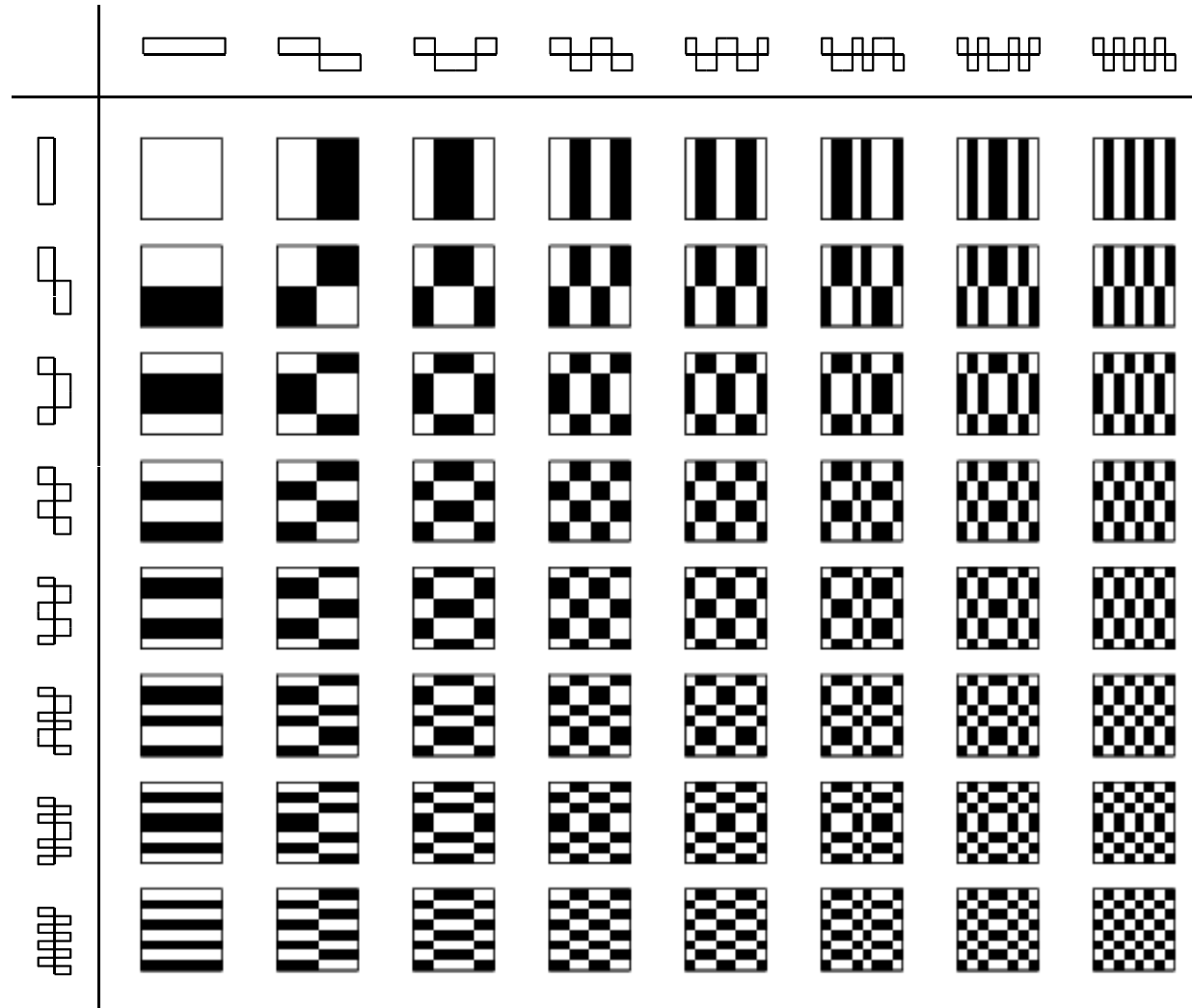


2D-Walshfunktion

Berechnung von
zweidimensionalen
Walshbasisfunktionen
mit Hilfe des
Aussenproduktes
(Basisfunktionen mit
separierbarem Kern)



2D Walsh-funktionen



Diskrete Walsh-Funktionen

Zunächst Definition einer speziellen Hadamard-Matrix \mathbf{H} . Hadamard-Matrizen sind orthogonale Matrizen mit dem Wertevorrat: $\{+1, -1\}$

Rekursive Definition von \mathbf{H} :
$$\mathbf{H}_{2N} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N & \mathbf{H}_N \\ \mathbf{H}_N & -\mathbf{H}_N \end{bmatrix} \quad \text{mit: } \mathbf{H}_1 = 1$$

Daraus folgt z.B.:
$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und: } \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

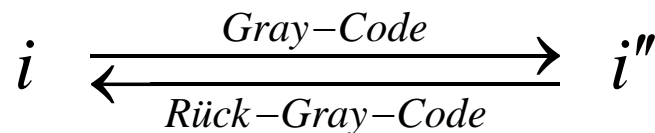
Walsh-Matrix \mathbf{W} durch umordnen der Hadamard-Matrix \mathbf{H}

$$\mathbf{H}_8 = \begin{matrix} & i' & & & & & & i \\ & 0 & \left[\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + \end{array} \right] & 0 \\ & 1 & \left[\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & + & - & + & - \end{array} \right] & 7 \\ & 2 & \left[\begin{array}{cccccccc} + & + & - & - & + & + & - & - \end{array} \right] & 3 \\ & 3 & \left[\begin{array}{cccccccc} + & - & - & + & + & - & - & + \end{array} \right] & 4 \\ & 4 & \left[\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & - & - & - & - \end{array} \right] & 1 \\ & 5 & \left[\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & - & + & - & + \end{array} \right] & 6 \\ & 6 & \left[\begin{array}{cccccccc} + & + & - & - & - & - & + & + \end{array} \right] & 2 \\ & 7 & \left[\begin{array}{cccccccc} + & - & - & + & - & + & + & - \end{array} \right] & 5 \end{matrix}$$

i' Hadamard-Ordnung
 i Walsh-Ordnung

$$i' = \text{BR}(i \oplus \lfloor i/2 \rfloor) = \text{BR}(i'')$$

BR Bit-Reversal
 \oplus Stellenweise Addition modulo 2
 $\lfloor \rfloor$ Gauß-Klammer



z.B.:

$$\begin{array}{r} i = 6 \Rightarrow i' = 5 \\ \begin{array}{ccc} & 1 & 1 & 0 \\ \oplus & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 \end{array} \hat{=} 5 \end{array}$$

Oder auch Interpretation als Abtastwerte der kontinuierlichen Walsh-Funktionen.

Gray-Code als linearer Code im endlichen Zahlenkörper GF(2)

Binärcode:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gray-Code

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{g} = \mathbf{Ax}$	Gray-Codierung
$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}$	Rück-Gray-Codierung

z.B. für $N = 4$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rechenregeln in GF(2):

$a :$	0	1	+	0	1	•	0	1
$a^{-1} :$	1			0	1		0	0
$(-a) :$	0	1		1	0		1	1
				Antivalenz			logisch UND	

Diskrete Walsh-Transformation (DWT)

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\mathbf{x}} \quad \text{Hintransformation}$$

W ist orthogonal und symmetrisch: $\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^T = \frac{1}{N} \mathbf{W}$

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}\tilde{\mathbf{x}}}$$
 Rücktransformation

Oder normiert: $\mathbf{W}_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{W}_0^{-1} = \mathbf{W}_0$

Zweidimensional (separierbarer Kern):

$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{W}_0$	2D-DWT
<small>$(M \times N)$ $(M \times M)$ $(M \times N)$ $(N \times N)$</small>	
$\mathbf{X} = \mathbf{W}_0 \cdot \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{W}_0$	2D-IDWT

Beispiel für eine 2D-DWT

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{W}_2 \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{W}_4$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 11 & 1 & -7 & -5 \\ 23 & -3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

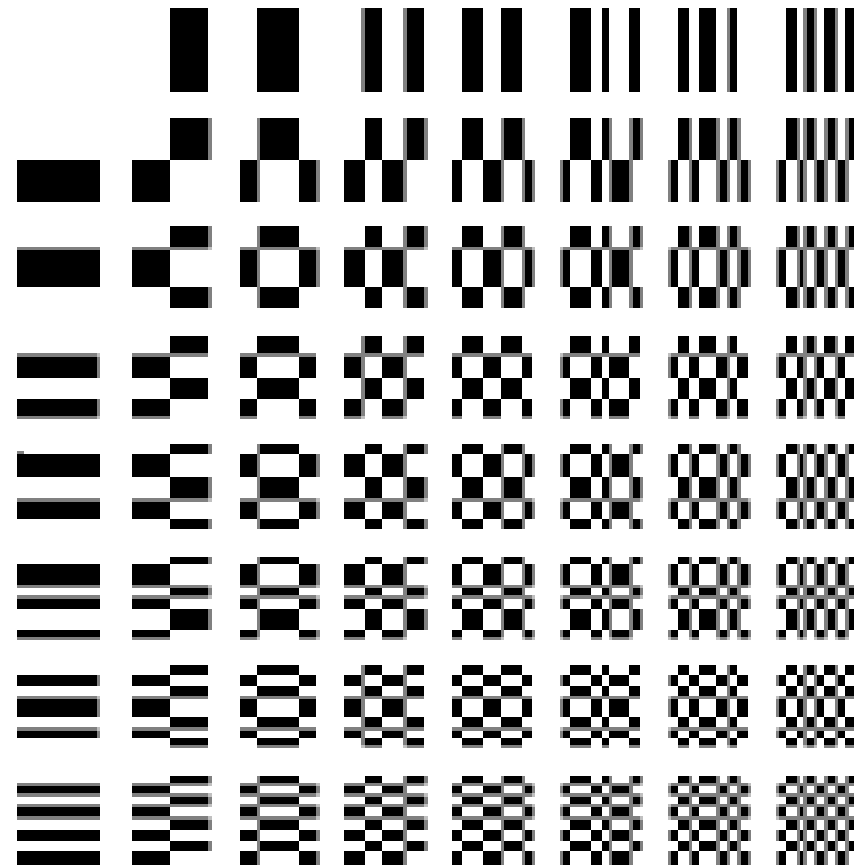
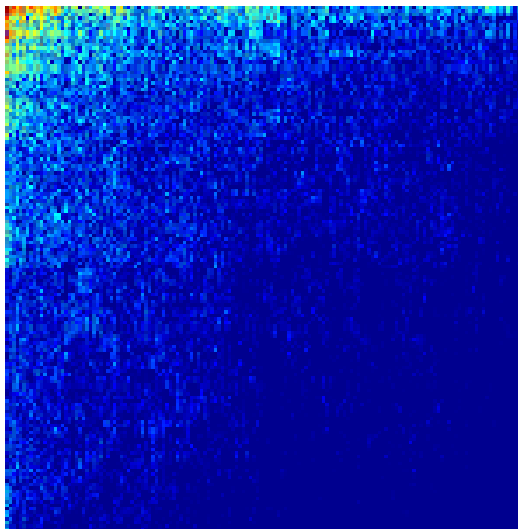
$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{W}_2 \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 34 & -2 & -14 & -6 \\ -12 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Zweidimensionale diskrete Walsh-Funktionen

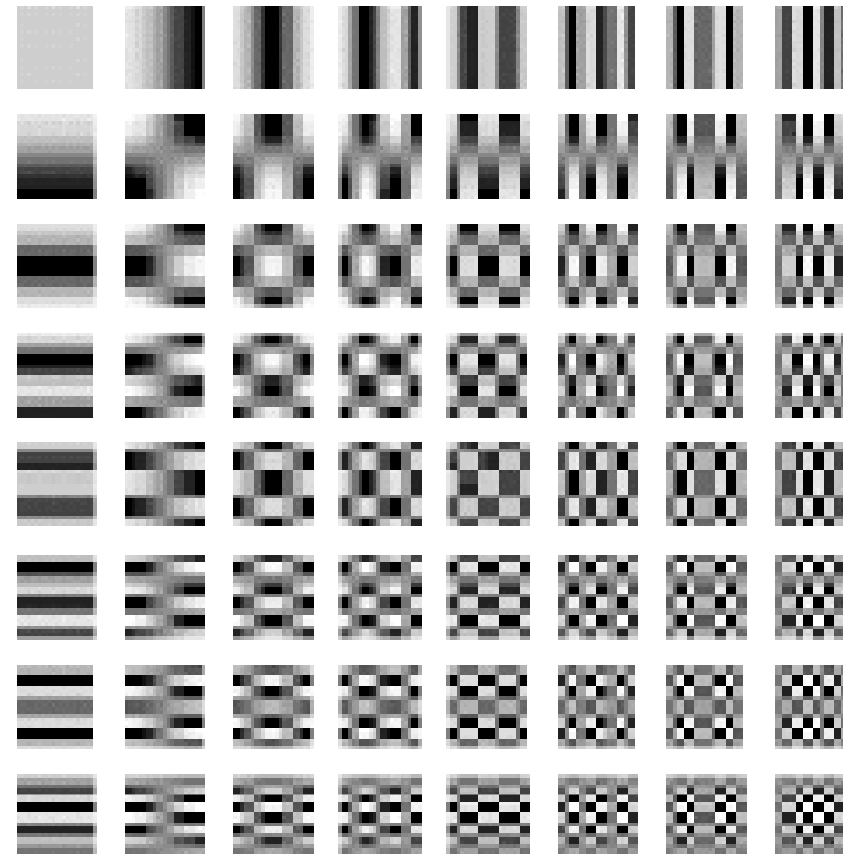
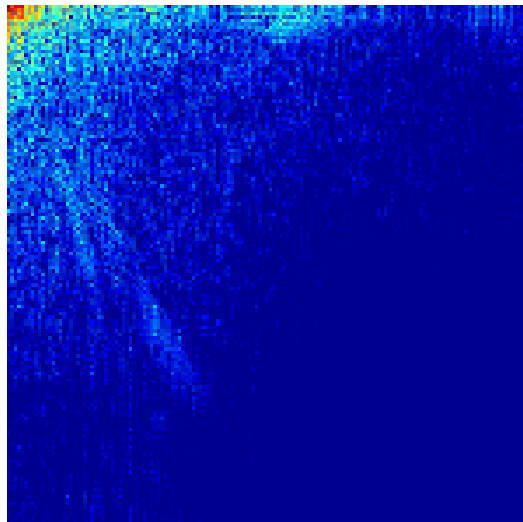
$\mathbf{W}_{ik} = \mathbf{w}_i \mathbf{w}_k^T$
dyad. Produkt

	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1

Walsh-Hadamard Transformation



Cosinus Transformation



Die Karhunen-Loève-Transformation (KLT, *siehe Kursvorlesung ME*)

Die Karhunen-Loève-Transformation ist definiert als:

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}} \quad \text{KLT}$$

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{y}} \quad \text{KLT}^{-1}$$

und es gilt:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} = E\{\mathbf{A}^T (\mathbf{x}\mathbf{x}^T) \mathbf{A}\} = \mathbf{A}^T \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$$

mit: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \lambda_N$

Die KLT kann wie hier auf der Grundlage der *Korrelationsmatrix*, oder aber auch aufbauend auf die *Autokovarianzmatrix* berechnet werden (der Erwartungswert wird zuvor abgezogen):

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{A}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})}$$

KLT für 2D-Bilder

Die 1D-Formulierung der KLT lässt sich auch auf Bilder übertragen, wenn man einen Vektor generiert, welcher aus den gestapelten Zeilen einer Bildmatrix besteht (da es ja nur um den Gesamtsummenfehler geht).

Damit ist jedoch ein Eigenwertproblem für symmetrische Matrizen der Dimension $N^2 \times N^2$ zu lösen. Ein Eigenwertproblem für eine Matrix der Dimension $N \times N$ benötigt $O(N^3)$ Operationen, also hier: $O(N^6)$.

Lässt sich hingegen ein Ensemble von Bildern $\mathbf{X} := \{\mathbf{X}_i\}$ der Dimension $N \times N$ durch das dyadische Produkt zweier eindimensionaler Ensembles $\mathbf{x}^1 := \{\mathbf{x}_i^1\}$ und $\mathbf{x}^2 := \{\mathbf{x}_i^2\}$ der Dimension $N \times 1$ modellieren gemäß:

$$\mathbf{X} := \mathbf{x}^1 \mathbf{x}^{2T}$$

(\mathbf{X} ist separierbar!), so lässt sich für jedes eindimensionale Ensemble eine KLT berechnen und man erhält:

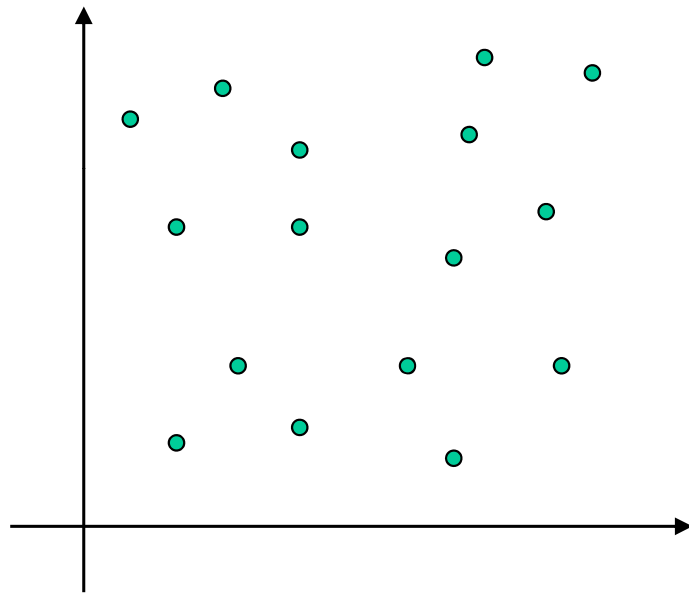
$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{1T} (\mathbf{x}^1 \mathbf{x}^{2T}) \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{1T} \mathbf{X} \mathbf{A}^2 \quad \text{2D-KLT bei separierbaren Bildern}$$

Damit sind nur 2 Eigenwertprobleme der Dimension $N \times N$ zu berechnen. Dies ergibt einen Rechenzeitgewinn von $O(N^6)/O(N^3) = O(N^3)$. Die Transformation selbst reduziert sich ebenfalls, nämlich von $O(N^4)$ auf $O(2N^3)$.

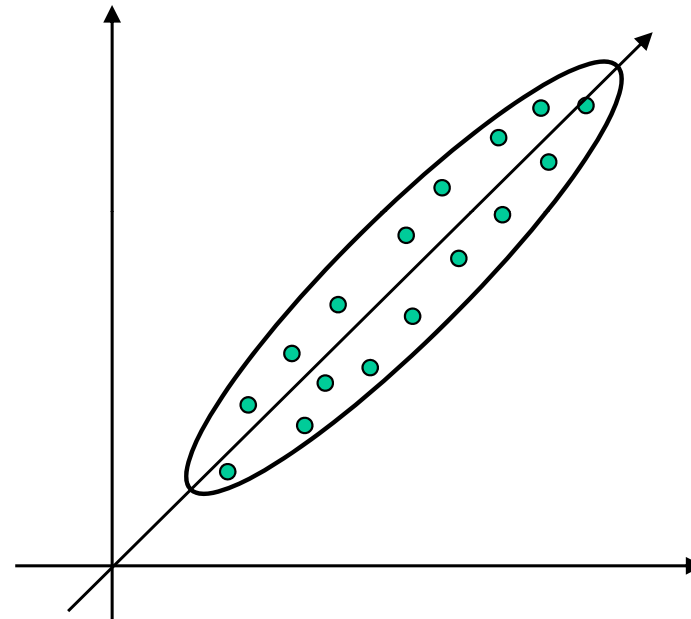
Eigenschaften der KLT

- Vorteile:
 - Die KLT ist optimal (bzgl. des quadr. Fehlers) im Hinblick auf bestmögliche Darstellung in Unterräumen mit orthogonaler Basis. Falls Vektorelemente stark korreliert sind, ergibt sich eine hohe Informationsverdichtung in wenigen Elementen der KLT. Die KLT profitiert von starken Korrelationen in den Vektorelementen.
 - Da \mathbf{R}_{yy} eine Diagonalmatrix ist, sind die Werte in y unkorreliert!
- Nachteile:
 - Die KLT ist *datenabhängig* und muss für jeden Datensatz individuell berechnet werden.
 - Außerdem existiert für die KLT *kein schneller* Algorithmus.

Datenreduktion in Abhängigkeit vom Korrelationsgrad

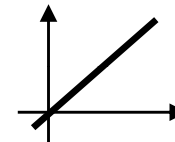


Daten unkorreliert (weißer Prozess)
KLT hat keine Bedeutung



Daten stark korreliert. KLT bringt hohen Gewinn.

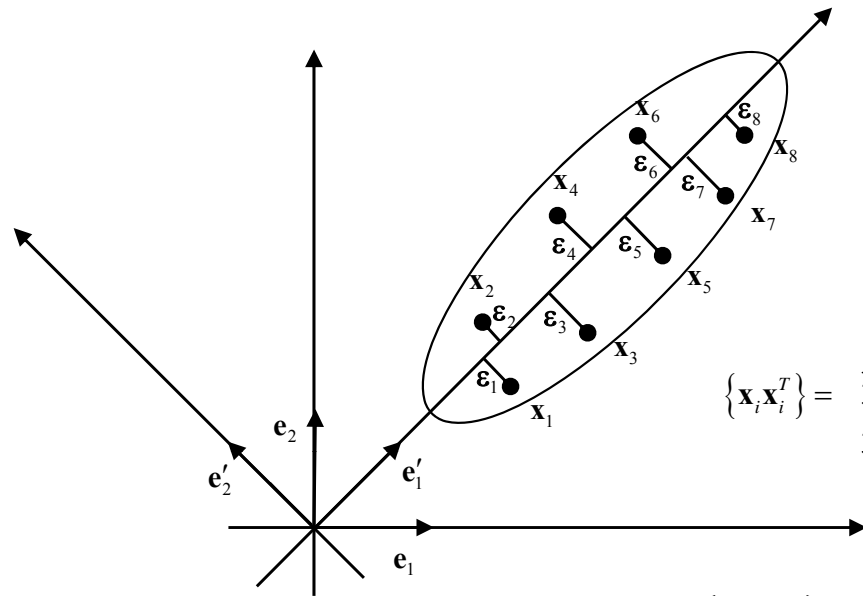
Extremfall: Bilder mit konstantem Grauwert
(hier genügt ein Vektor zur Darstellung)



Beispiel zur KLT

$$\text{KLT: } \mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

$$\text{KLT}^{-1}: \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{y}$$



$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_6] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 7 & 5 & 10 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T\} = \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc} & 3 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 8 & 10 & 10 & 8 & 12 & 12 \\ \hline 3 & 9 & 9 & 5 & 25 & 35 & 7 & 49 & 35 & 8 & 64 & 80 & 10 & 100 & 80 & 12 & 144 & 144 \\ \hline 3 & 9 & 9 & 7 & 35 & 49 & 5 & 35 & 25 & 10 & 80 & 100 & 8 & 80 & 64 & 12 & 144 & 144 \end{array}$$

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T\} = \begin{bmatrix} 65,16 & 63,83 \\ 63,83 & 65,16 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 129 \quad \lambda_2 = 1,33$$

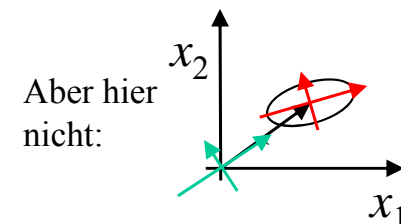
$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{A}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 129 & 0 \\ 0 & 1,33 \end{bmatrix}$$

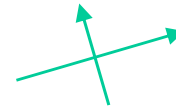
Projektion in Richtung \mathbf{e}'_1 : $\mathbf{P} = \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1{}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Cosinus-Transformation: $\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ Identisch mit KLT!!

In diesem Fall führt die KLT von \mathbf{x} auf die gleichen Ergebnisse wie die KLT von $(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})$!

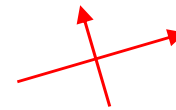


$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{X}$$

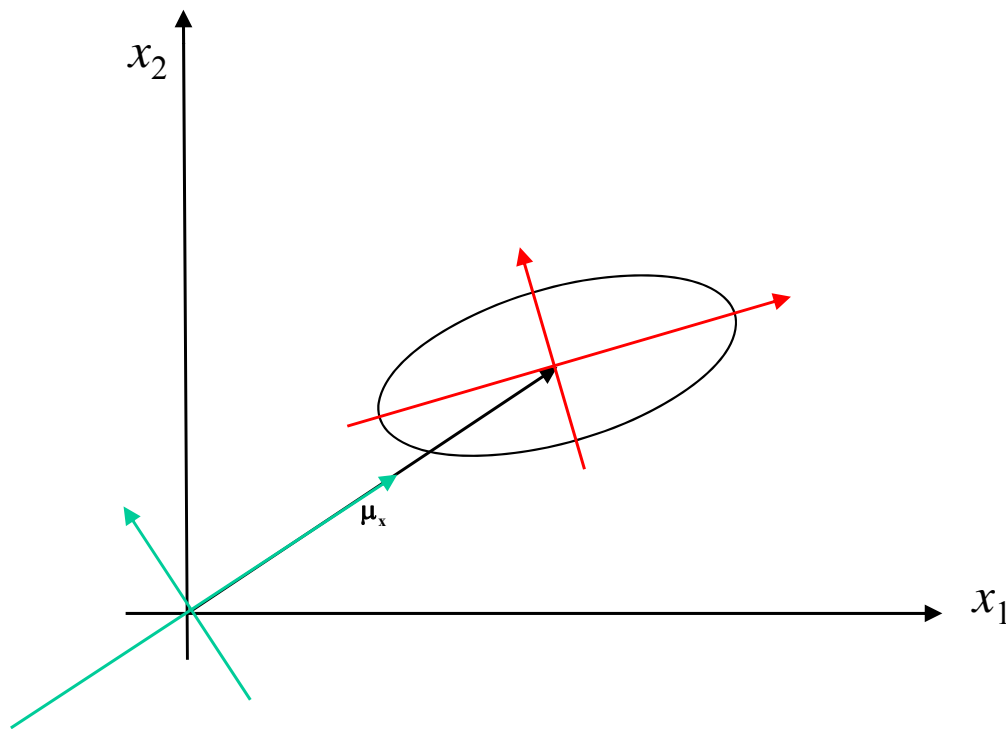


Die beste *lineare* Transformation
auf der Grundlage der
Autokorrelationsmatrix

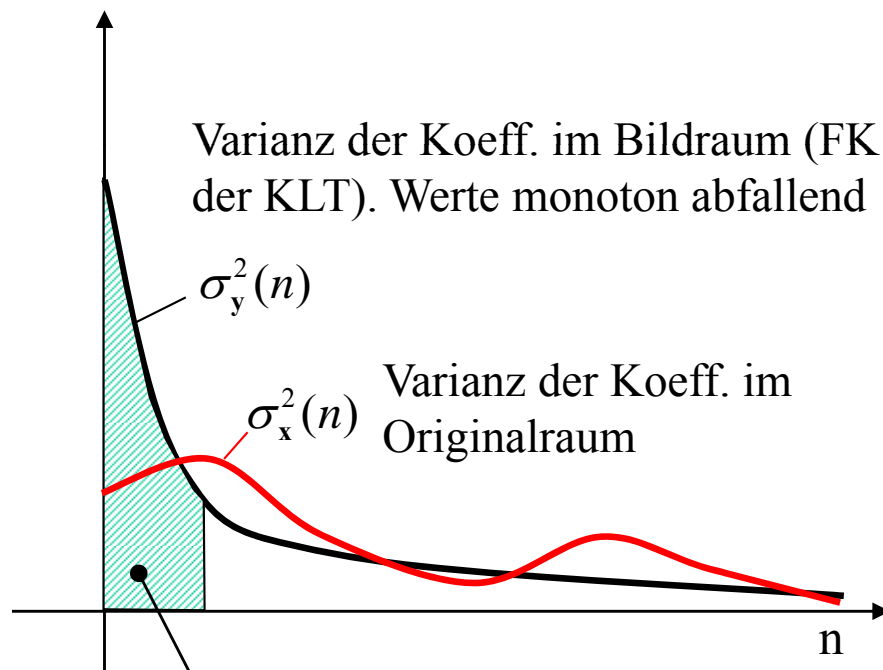
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_2^T (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_x)$$



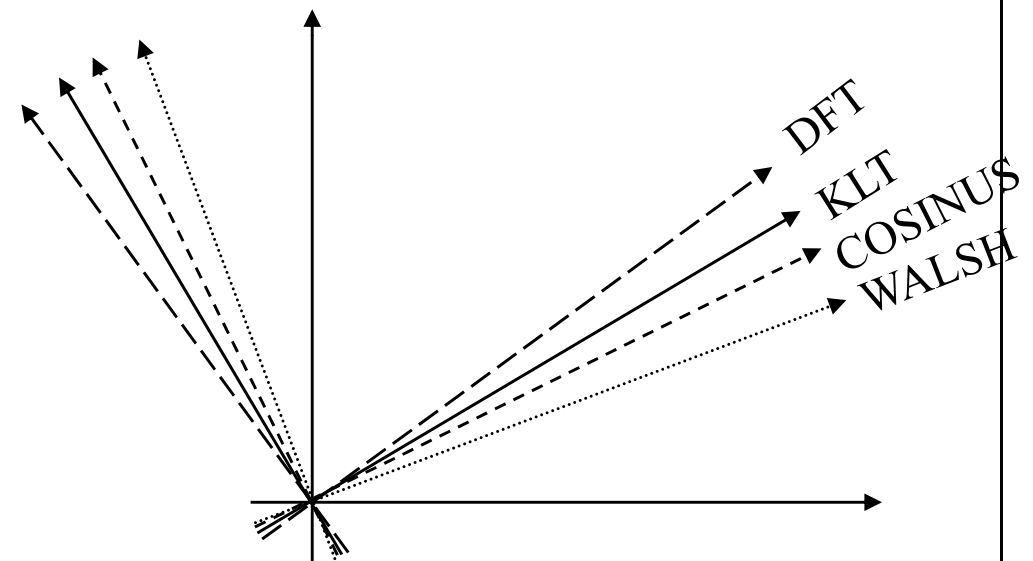
Die beste *affine*
Transformation auf der
Grundlage der
Autokovarianzmatrix



Eigenschaften der KLT



Jede Teilsumme ist unabhängig von M maximal!



Verhalten unterschiedlicher unitärer Transformationen

Varianz der Fourierkoeffizienten unterschiedlicher unitärer Transformationen

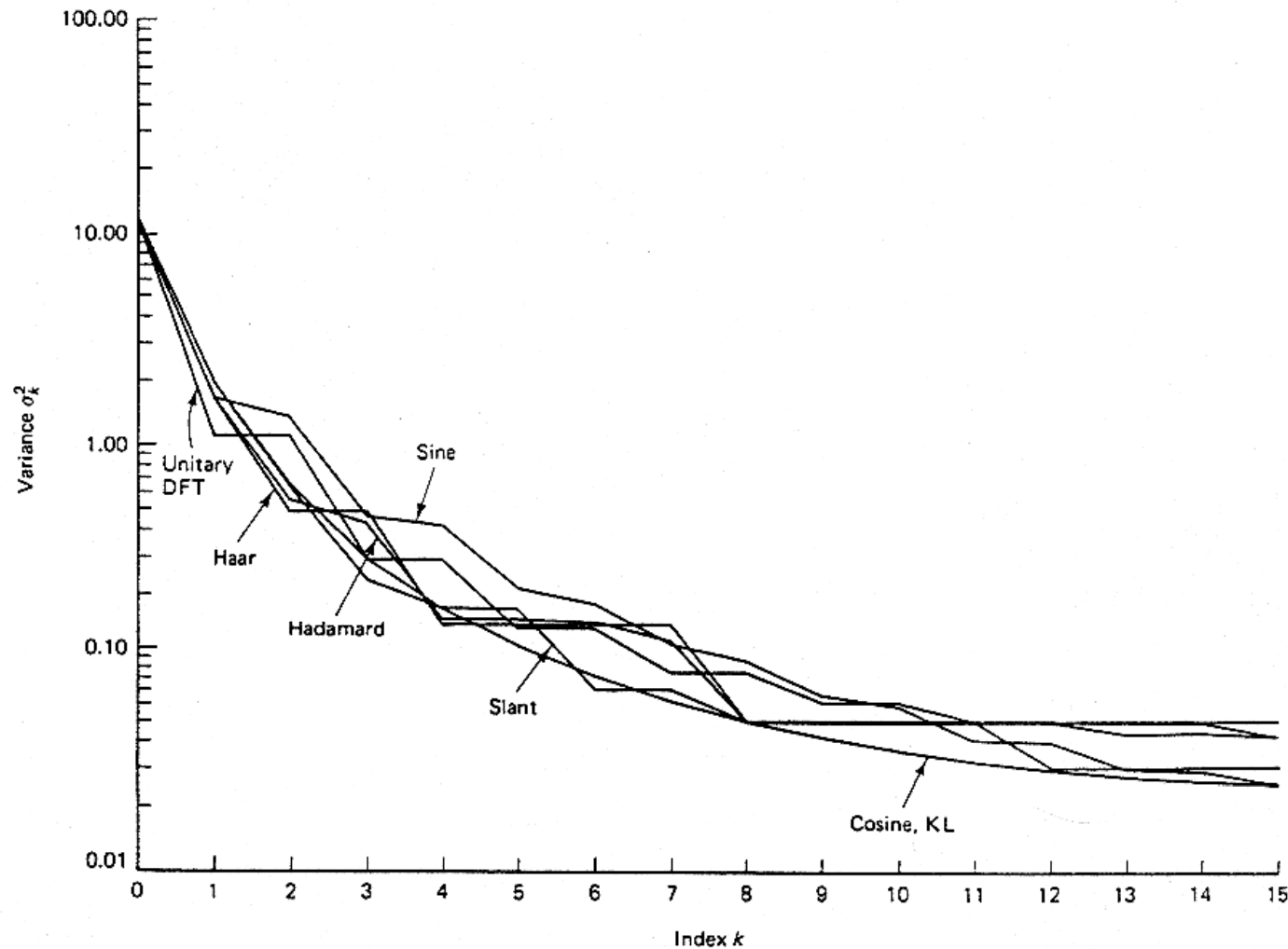
sehr ähnlich !!

Transform ↓ k	KL	Cosine	Sine	Unitary DFT	Hadamard	Haar	Slant
0	12.442	12.406	11.169	12.406	12.406	12.406	12.406
1	1.946	1.943	1.688	1.100	1.644	1.644	1.904
2	0.615	0.648	1.352	0.292	0.544	0.487	0.641
3	0.292	0.295	0.421	0.139	0.431	0.487	0.233
4	0.171	0.174	0.463	0.086	0.153	0.144	0.173
5	0.114	0.114	0.181	0.062	0.152	0.144	0.172
6	0.082	0.083	0.216	0.051	0.149	0.144	0.072
7	0.063	0.063	0.098	0.045	0.121	0.144	0.072
8	0.051	0.051	0.116	0.043	0.051	0.050	0.051
9	0.043	0.043	0.060	0.045	0.051	0.050	0.051
10	0.037	0.037	0.067	0.051	0.051	0.050	0.051
11	0.033	0.033	0.040	0.062	0.051	0.050	0.051
12	0.030	0.030	0.042	0.086	0.051	0.050	0.031
13	0.028	0.028	0.031	0.139	0.051	0.050	0.031
14	0.027	0.027	0.029	0.292	0.050	0.050	0.031
15	0.026	0.026	0.026	1.100	0.043	0.050	0.031

Varianz der Fourierkoeffizienten σ_k^2 verschiedener unitärer Transformationen für eine stationäre Markov-Sequenz mit $\delta = 0,95$ und $N = 16$.

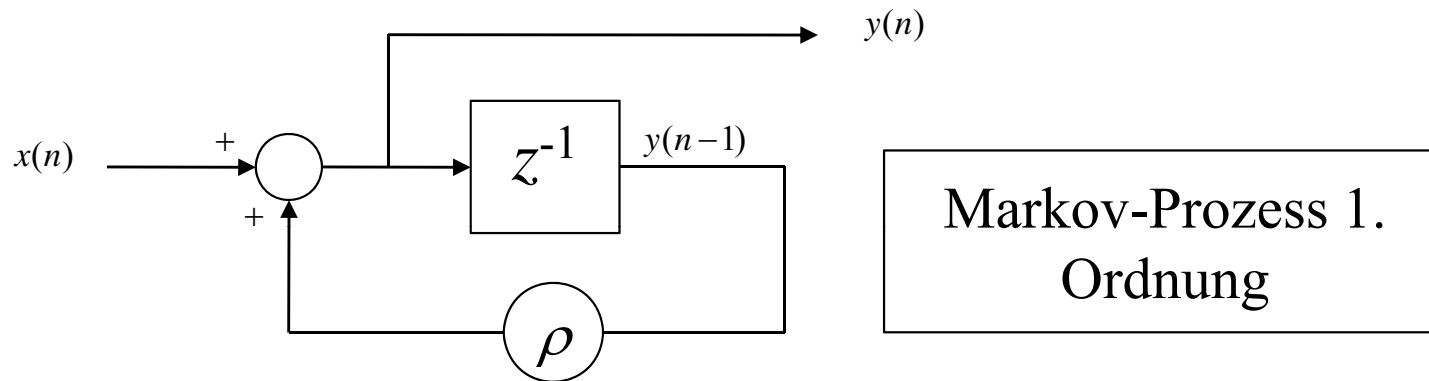
(Aus A.K. Jain: „Fundamentals of Digital Image Processing“)

Varianz der Fourierkoeffizienten unterschiedlicher unitärer Transformationen



Autoregressiver oder Markov-Prozess 1. Ordnung

Er entsteht durch Anregung eines rekursiven Filters 1. Ordnung mit einem stationären weißen Prozess $x(n)$:



$$y(n) = x(n) + \rho y(n-1)$$

z-Transformierte:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \rho \cdot z^{-1}}$$

Auflösung der Rekursion:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i x(n-i)$$

Autokorrelationsfunktion (AKF):

$$r_{xx}(n) = \sigma^2 \delta_{n,0} \quad \text{weißer Prozess}$$

$$r_{yy}(n) = \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2} \rho^{|n|}$$

$$\sigma_y^2 = E\{|y(n)|^2\} = \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2}$$

Autoregressiver oder Markov-Prozess 1. Ordnung

Die Kovarianzmatrix ist eine Toeplitz-Matrix. Sie hat abgeschnitten folgendes Aussehen:

$$\mathbf{R}_{yy} = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho^{N-1} & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte lauten: $\lambda_k = \frac{1}{1-2\rho \cos(\alpha_k) + \rho^2} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

Dabei sind die α_k die reellen positiven Wurzeln von:

$$\tan(N\alpha_k) = -\frac{(1-\rho^2)\sin(\alpha_k)}{\cos(\alpha_k) - 2\rho + \rho \cos(\alpha_k)}$$

Die Elemente der Eigenvektoren $\mathbf{u}_k, k = 0, 1, \dots, N-1$ lauten:

$$u_k(n) = \frac{2}{N + \lambda_k} \sin\left(\alpha_k \left(n - \frac{N-1}{2}\right) + (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1$$

Die Diskrete Cosinus-Transformation (DCT)

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T \text{ reell, orthogonal}$$

mit:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \left\{ \sqrt{2} \cdot \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N} \right\} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, N-1 \\ m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{array}$$

Die DCT kann schnell über die FFT berechnet werden, wegen:

$$\tilde{x}(k) = \text{Re} \left[\alpha(k) \cdot e^{-j\pi k/2N} \cdot \text{DFT}_N \{ x'(n) \} \right]$$

mit einer Verschachtelung der geraden und ungeraden Werte:

$$\left. \begin{array}{l} x'(n) = x(2n) \\ x'(N-n-1) = x(2n+1) \end{array} \right\} 0 \leq n \leq \left(\frac{N}{2}\right) - 1$$

$$\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \alpha(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

Die Basisvektoren der DCT (Zeilen der Matrix \mathbf{C}) sind Eigenvektoren der symmetrischen Tridiagonalmatrix

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & -\alpha & & \mathbf{0} \\ -\alpha & 1 & & \\ & & 1 & -\alpha \\ \mathbf{0} & & -\alpha & (1-\alpha) \end{bmatrix}$$

Die DCT approximiert die KLT sehr gut für Markov-Prozesse erster Ordnung der Länge N , deren Korrelationsmatrix gegeben ist durch folgende Toeplitz-Matrix,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho^{N-1} & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

falls der Wert von ρ nahe bei 1 liegt !!

Der Grund liegt darin, daß \mathbf{R}^{-1} eine symmetrische Tridiagonalmatrix ist, welche für

$$\beta^2 = \frac{(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\rho}{(1+\rho^2)}$$

Die folgende Gleichung erfüllt:

$$\beta^2 \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} (1-\rho\alpha) & -\alpha & & \mathbf{0} \\ -\alpha & 1 & & \\ & & 1 & -\alpha \\ \mathbf{0} & & -\alpha & (1-\rho\alpha) \end{bmatrix}$$

Daraus folgt: $\beta^2 \mathbf{R}^{-1} \approx \mathbf{Q}_c$ für $\boxed{\rho \approx 1}$

Und deshalb sind die EV von \mathbf{R} und \mathbf{Q}_c annähernd gleich. Dies verdeutlicht die große Bedeutung der DCT für die Bildcodierung, nämlich als *Approximation einer Optimalcodierung*.

Eine Matrix \mathbf{A} und ihre Inverse \mathbf{A}^{-1} besitzen die gleichen Eigenvektoren! Die Eigenwerte ergeben sich über den Kehrwert.

Die Eigenvektoren transformieren eine Matrix auf Diagonalform:

$$\mathbf{FAF}^* = \mathbf{\Lambda}$$

wegen $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ folgt nun:

$$(\mathbf{FAF}^*)^{-1} = \mathbf{\Lambda}^{-1}$$

$\mathbf{\Lambda}^{-1}$ ist ebenfalls diagonal mit $\lambda'_i = 1 / \lambda_i$

Für eine unitäre Matrix \mathbf{F} gilt:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^* \quad \text{und} \quad (\mathbf{F}^*)^{-1} = \mathbf{F}$$

und schließlich:

$$\mathbf{FA}^{-1}\mathbf{F}^* = \mathbf{\Lambda}^{-1} \quad \text{q.e.d.}$$