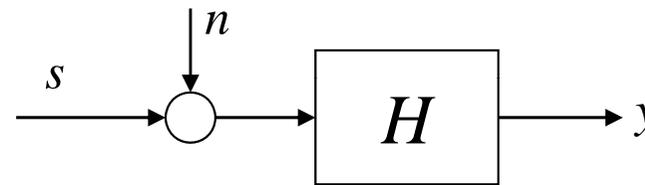
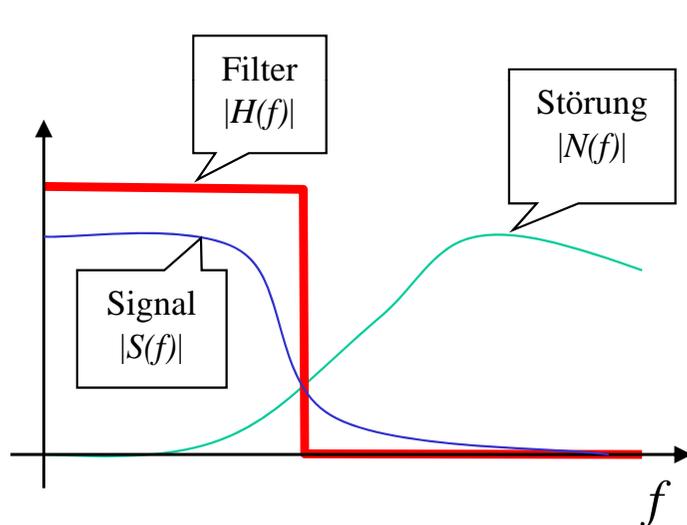


6. Signal- und Bildfilterung sowie Korrelation

Bildfilterung und Korrelation

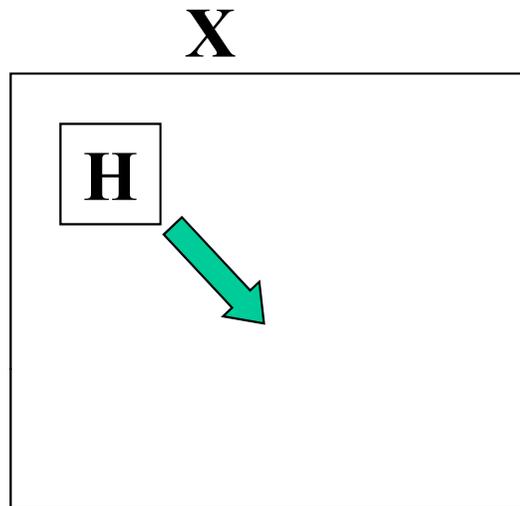
- Die *lineare* Bildfilterung wird zur Rauschunterdrückung oder zur Verstärkung von Bildmerkmalen eingesetzt, wie z.B. Extraktion von Kanten und dient in erster Linie zur Bildverbesserung oder zum Image Enhancement und damit zur Verbesserung des visuellen subjektiven Eindrucks



$$y = h * (s + n) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad Y(f) = H(f) \cdot (S(f) + N(f))$$
$$\Rightarrow |Y(f)| = |H(f)| \cdot |S(f) + N(f)|$$

- Die Störungen werden unterdrückt, das Bildsignal bleibt nahezu erhalten (höhere Frequenzen und damit Kanteninformationen werden etwas weggenommen => Unschärfe). Kompromiss zwischen Störunterdrückung und Signalverfälschung (Kanten verschleifen).

Lineare Bildfilterung mit lokalen Masken (FIR-Filter)

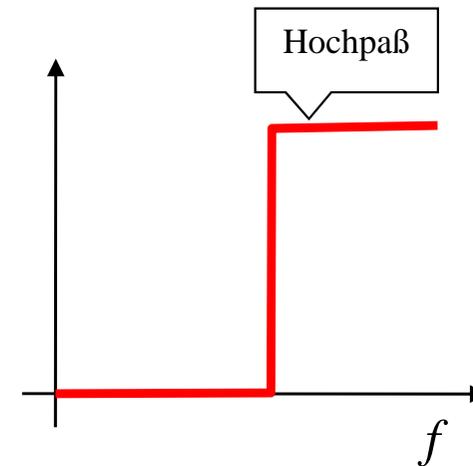
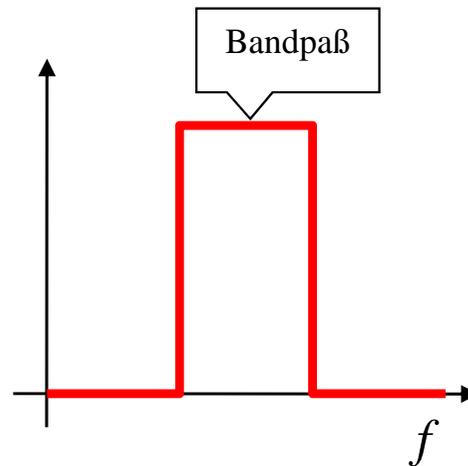
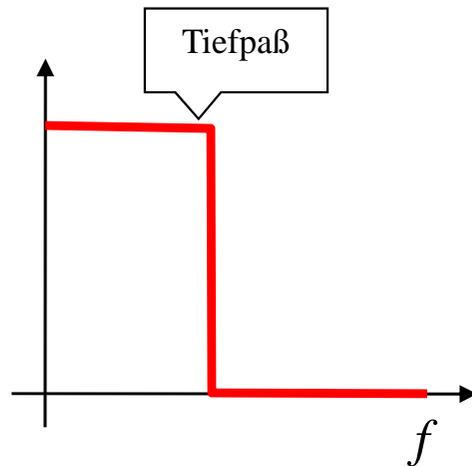


$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tiefpaß
(Glättung)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hochpaß
(Kanten-
verschärfung)

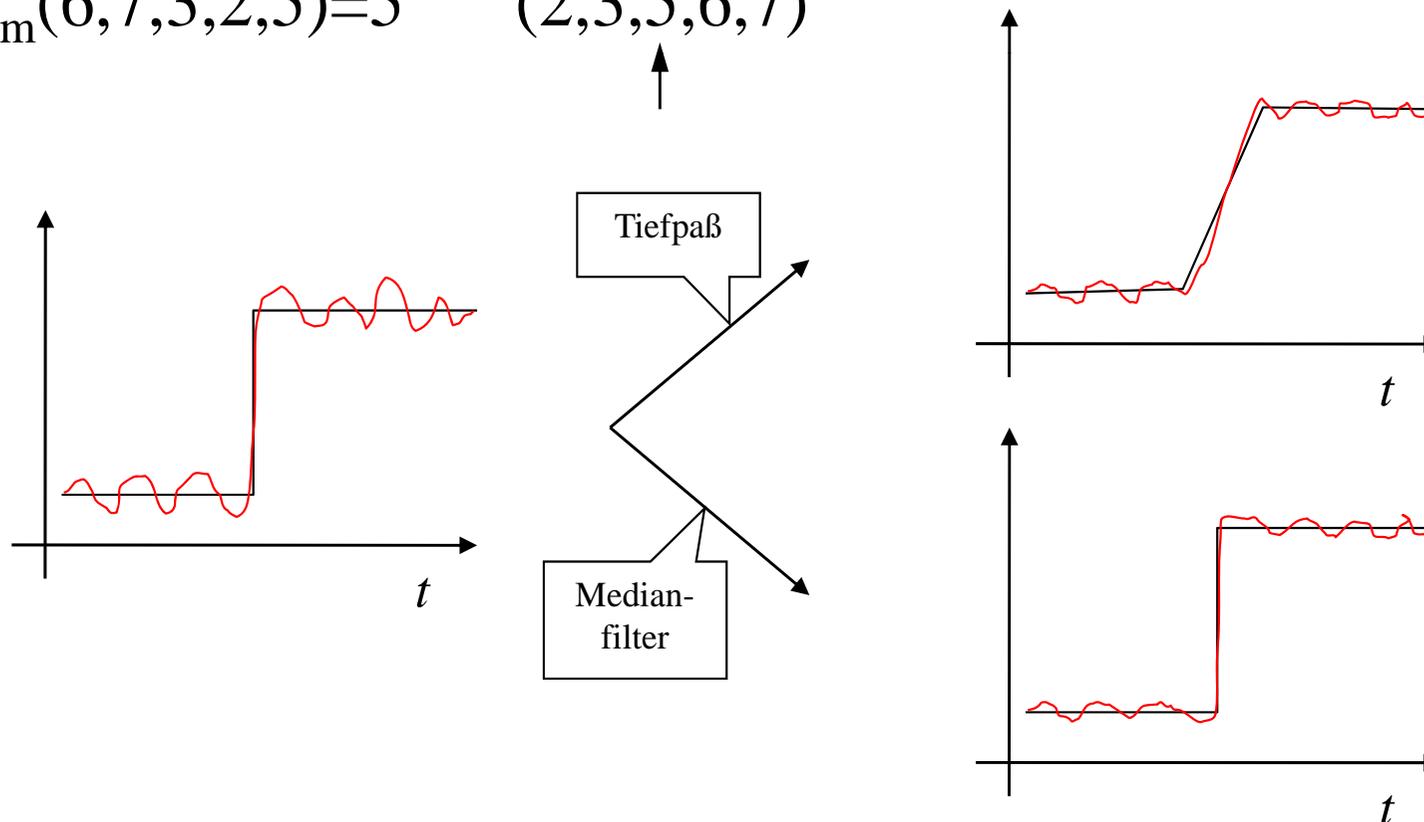


Nichtlineare Filter – Medianfilter

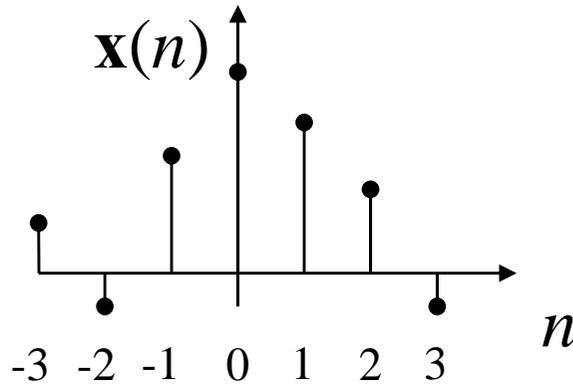
(siehe BV-Praktikum)

- Rauschunterdrückung bei gleichzeitiger Erhaltung von Kanten
- Der Medianwert einer Punktfolge ist der in der Mitte der sortierten Folge stehende Wert, also z.B.:

$$x_m(6,7,3,2,5)=5 \quad (2,3,5,6,7)$$

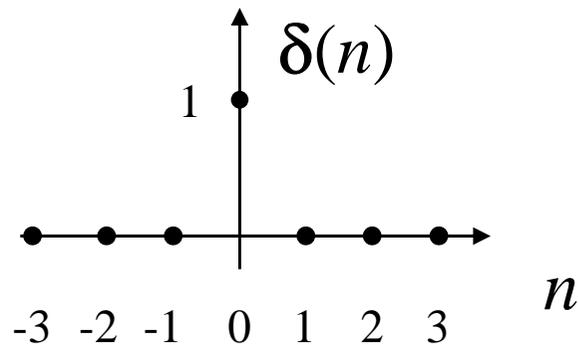


Diskrete Signale und Systeme



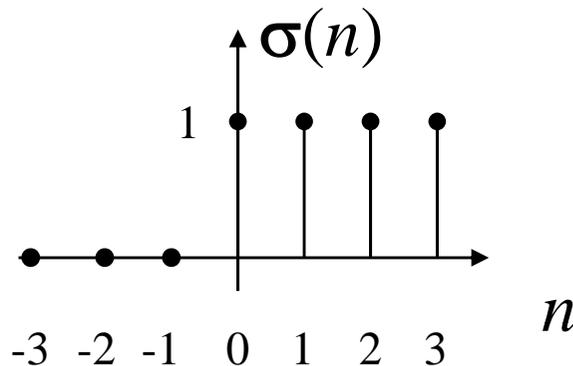
i.a. komplexe Zahlenfolge

$$\mathbf{x} = \{x(n)\} \quad -\infty < n < +\infty$$



δ -Impuls

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$



Einheitssprung

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

Es gilt: $\sigma(n) = \sum_{i=-\infty}^{i=n} \delta(i)$ Summation

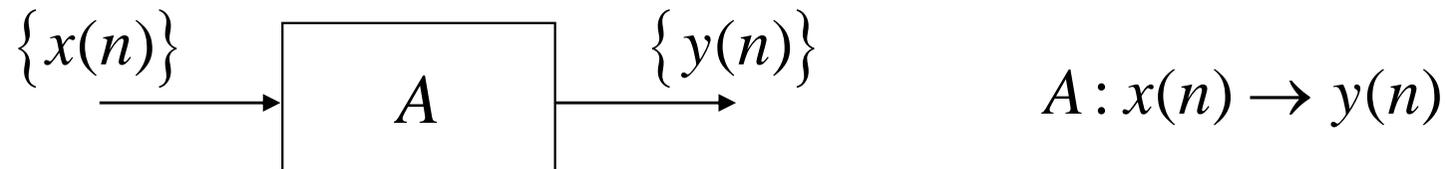
und: $\delta(n) = \sigma(n) - \sigma(n-1)$ 1. Differenz

Beschreibung einer beliebigen Folge als δ -Impulsfolge:

$$\boxed{\mathbf{x}(n) = \sum x(i) \cdot \delta(n-i)}$$

(gewichtete Summe von verschobenen δ -Impulsen)

Übertragungsverhalten linearer, zeitinvarianter diskreter Systeme



Linearität (additiv und homogen)

$$A\{\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)\} = \alpha_1 A\{x_1(n)\} + \alpha_2 A\{x_2(n)\}$$

Zeitinvariantes System:

$$A\{x(n - \nu)\} = y(n - \nu)$$

Charakterisierung von A durch Impulsantwort:

$$A\{\delta(n)\} = \mathbf{h}(n)$$

Damit Reaktion auf beliebige Erregung mit Faltungsoperation:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= A\left\{\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} x(i) \cdot \delta(n-i)\right\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} x(i) \cdot A\{\delta(n-i)\} = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} x(i) \cdot h(n-i) \\ &= \mathbf{x}(n) * \mathbf{h}(n) \quad \text{Faltungssumme} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\mathbf{x}(n) * \mathbf{h}(n) = \mathbf{h}(n) * \mathbf{x}(n) \quad \text{kommutativ}$$

Beschreibung linearer diskreter Systeme mit linearen *Differenzgleichungen* mit konstanten Koeffizienten

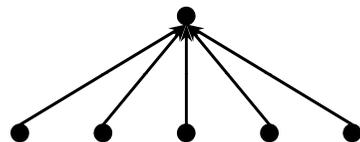
$$a_N y(n + N) + a_{N-1} y(n + N - 1) + \dots + a_1 y(n + 1) + a_0 y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n + 1) + \dots + b_M x(n + M)$$

$$\sum_{\nu=0}^N a_{\nu} y(n + \nu) = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} x(n + \mu)$$

mit: $a_N = 1$

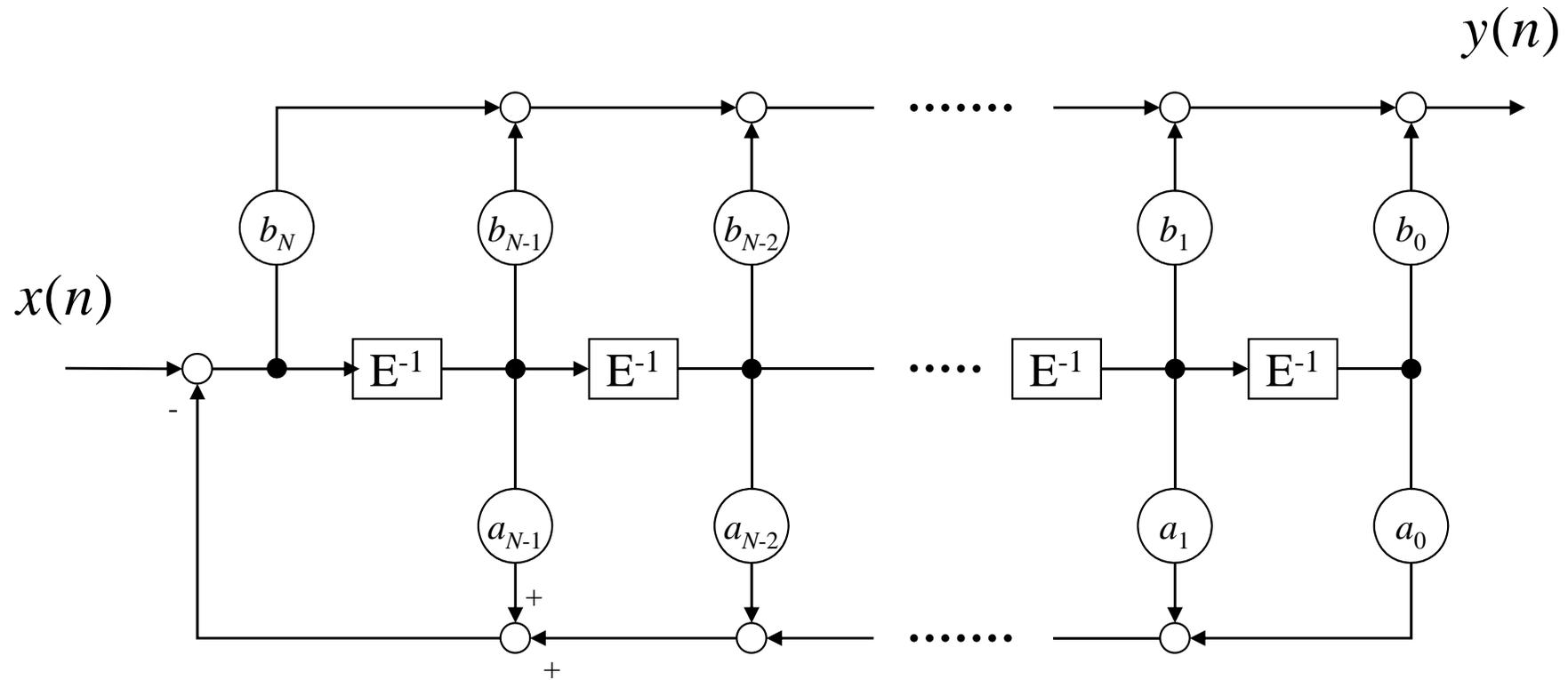
$M \leq N$ kausale Systeme

Optische Systeme i.a. nichtkausal!



IIR-Filter

(Infinite Impulse Response)



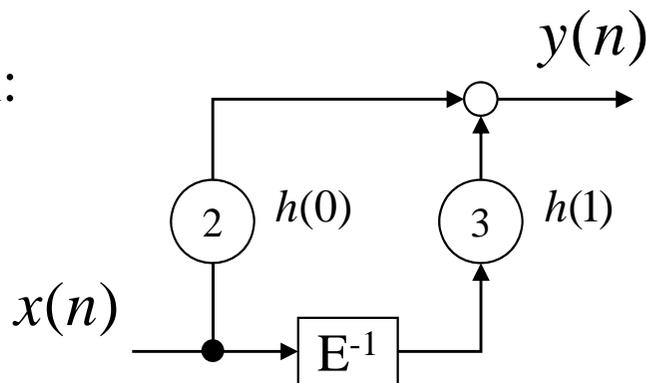
$$E^v \{ y(n) \} = y(n + v) \quad \text{Verschiebeoperator}$$

Nichtrekursive Systeme (FIR)

$y(n) = f(x(n), x(n-1), \dots)$ Fkt. der gegenwärtigen und der vergangenen Eingangswerte

also z.B. $a_0 = a_1 = \dots = a_{N-2} = a_{N-1} = 0$

Beispiel:



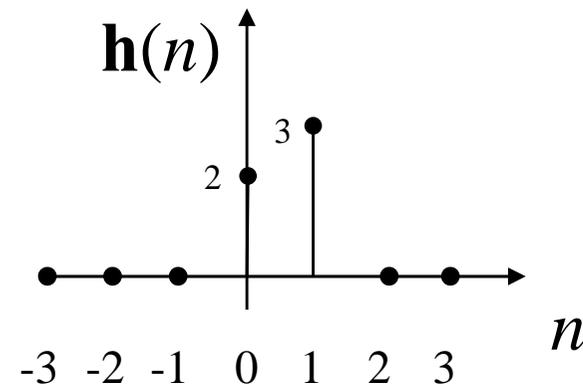
Transversalfilter

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1)$$

Impulsantwort: $\mathbf{x}(n) = \delta(n)$

$$\Rightarrow \mathbf{h}(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1)$$

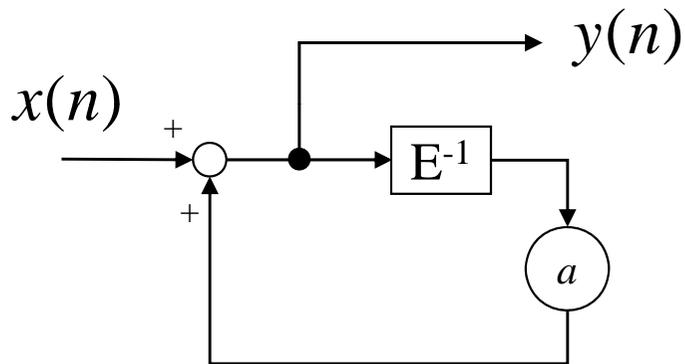
FIR: Finite Impulse Response
i.a. keine Stabilitätsprobleme



Rekursive Systeme

$y(n) = f(y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots)$ i.a. IIR, infinite impulse response systems (auch FIR, z.B. bei pole-zero cancellation)

z.B. $y(n) - ay(n-1) = x(n)$



Impulsantwort:

$$h(n) - ah(n-1) = \delta(n)$$

$$h(n) = 0 \quad \text{für } n < 0$$

n=0: $h(0) = \delta(0) = 1$ wegen $h(-1) = 0$

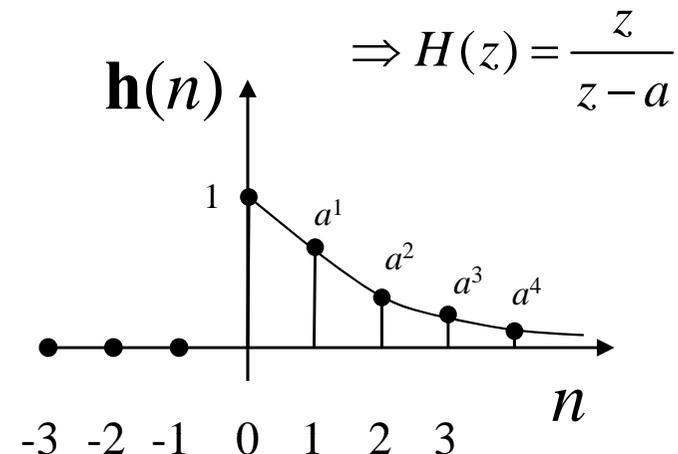
n=1: $h(1) - ah(0) = 0 \Rightarrow h(1) = a$

n=2: $h(2) - ah(1) = 0 \Rightarrow h(2) = a^2$

\vdots \vdots \vdots \vdots

$\Rightarrow h(n) = a^n \cdot \sigma(n)$

stabil für $a < 1$



Kontinuierliche Faltung und Korrelation

$$\begin{aligned} z(\tau) &= (x * y)(\tau) \\ &= \langle x(t), y^*(\tau - t) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(\tau - t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(\tau) &= (x \# y)(\tau) \\ &= \langle x(t), y(t - \tau) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt \end{aligned}$$

$\begin{array}{ccc} (x * y)(\tau) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}} \\ \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \end{array} & \tilde{x}(f) \cdot \tilde{y}(f) \\ (x \# y)(\tau) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}} \\ \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \end{array} & \tilde{x}(f) \cdot \tilde{y}^*(f) \end{array}$	Fourier- Korrespondenzen
--	-----------------------------

Mit $y_- = y(-t)$ gilt:

$$(x * y_-^*)(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle = (x \# y)(\tau)$$

$$(x * y)(\tau) = (x \# y_-^*)(\tau)$$

Korrelation	\cong	Faltung mit konjugiert gespiegeltem Signal
Faltung	\cong	Korrelation mit konjugiert gespiegeltem Signal

Kontinuierliche Faltung und Korrelation

Außerdem gilt beim Vertauschen der Signale:

$$x * y = y * x$$

$$(x \# y)(\tau) = (y^* \# x^*)(\tau) = ((y \# x)(-\tau))^*$$

Wegen Kommutativität
im Spektralbereich

Beweis:

$$(x \# y)(\tau) \xrightleftharpoons[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \tilde{x}(f) \cdot \tilde{y}^*(f) = (\tilde{y}(f) \cdot \tilde{x}^*(f))^* \xrightleftharpoons[\mathcal{F}]{\mathcal{F}^{-1}} ((y \# x)(-\tau))^*$$

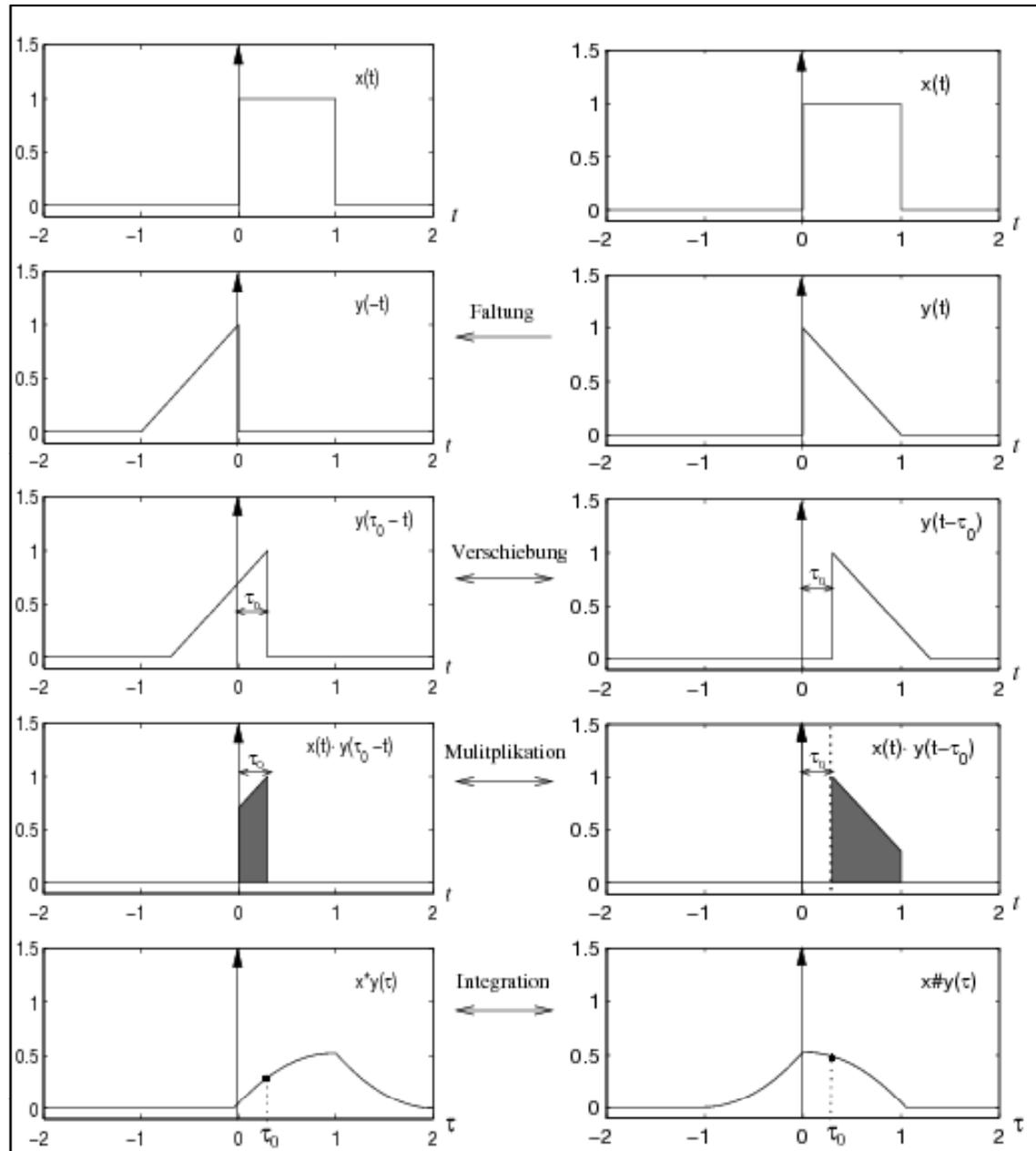
$$\text{wegen: } x^*(-t) \xrightleftharpoons[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \tilde{x}^*(f)$$

Faltung: $(x * y)(\tau)$

Korrelation: $(x \# y)(\tau)$

$\hat{=}$ Innenprodukt in allen
translatorischen Positionen

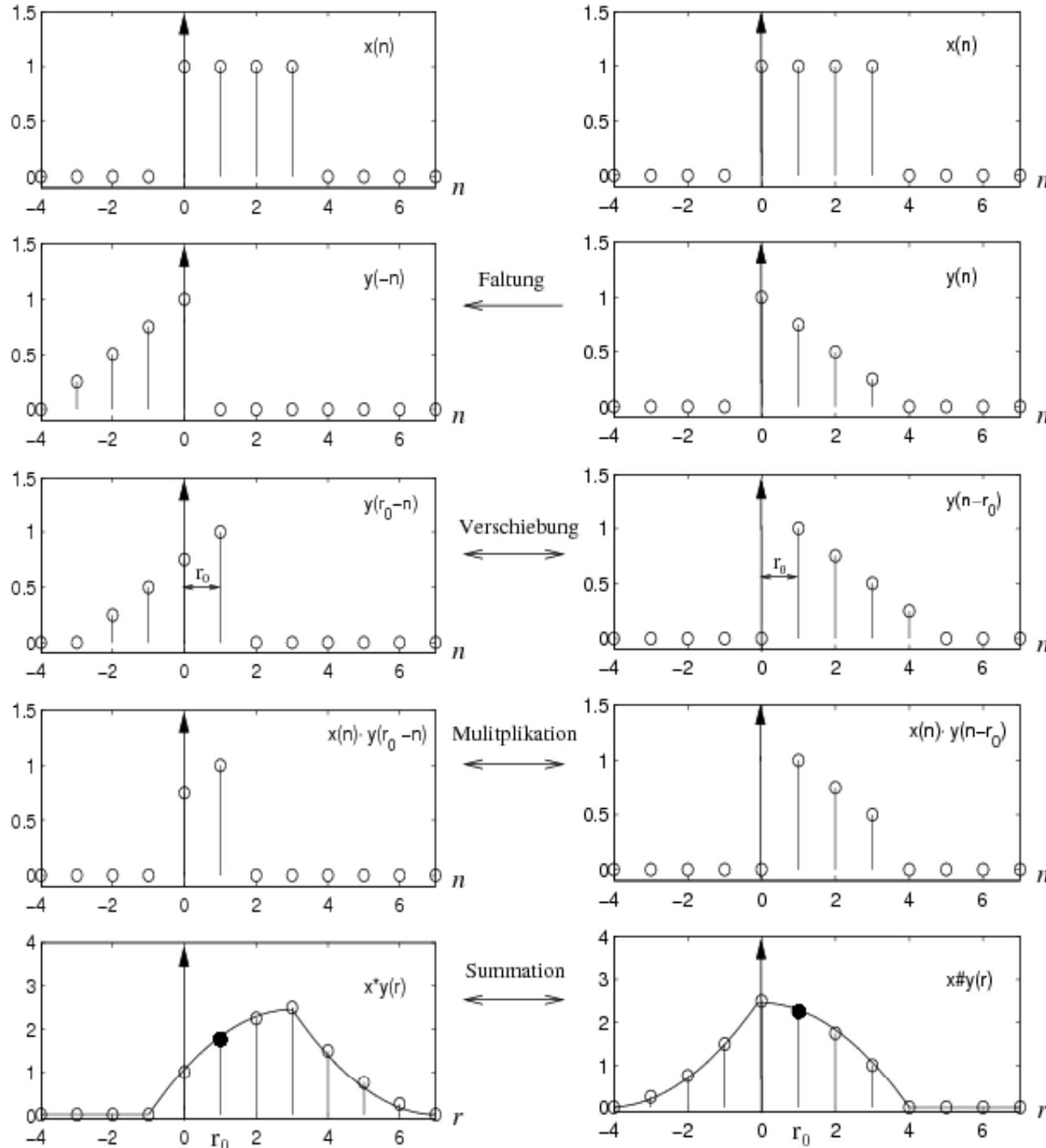
$\hat{=}$ Ähnlichkeit in allen
translatorischen Positionen



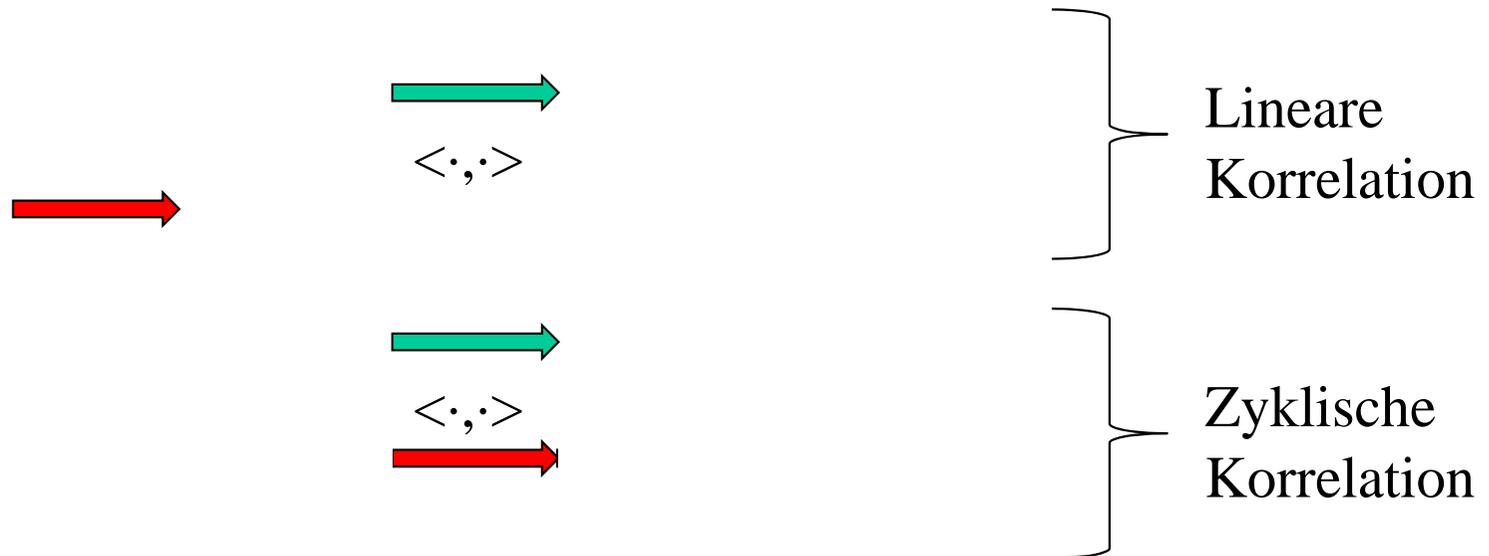
Diskrete Faltung und Korrelation (linear und zyklisch!)

$$\begin{aligned}z(\nu) &= (x(n) * y(n))(\nu) \\ &= \langle \mathbf{x}(n), \mathbf{y}^*(\nu - n) \rangle \\ &= \sum x(n), y(\nu - n)\end{aligned}$$

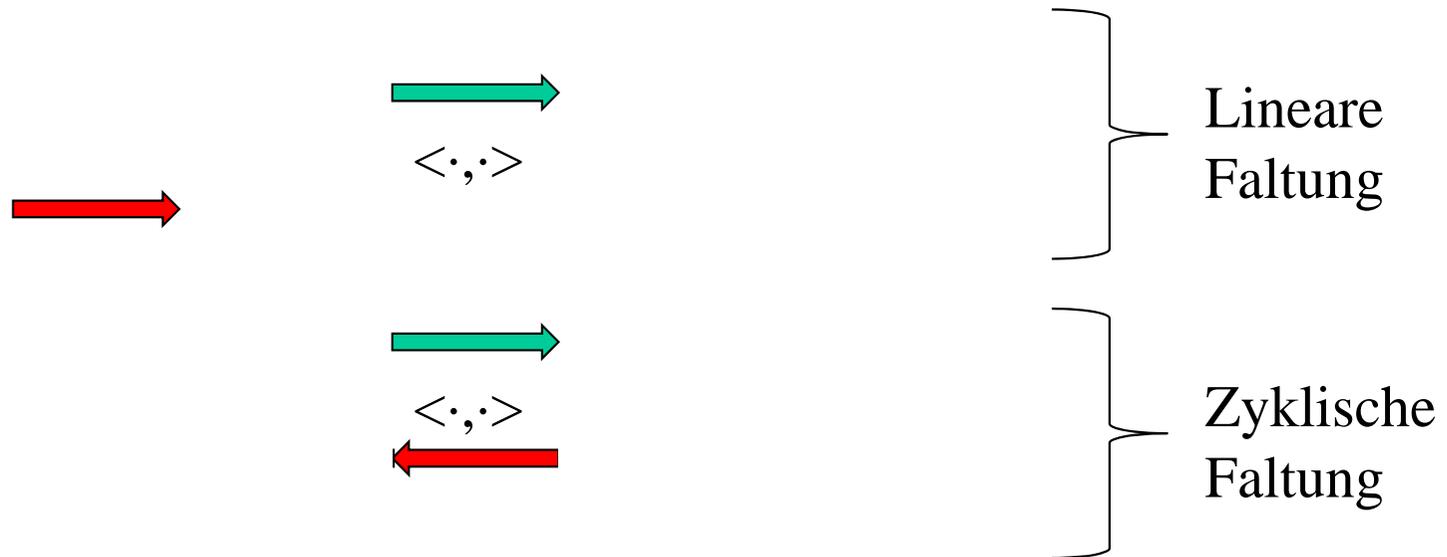
$$\begin{aligned}z(\nu) &= (x(n) \# y(n))(\nu) \\ &= \langle \mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n - \nu) \rangle \\ &= \sum x(n), y^*(n - \nu)\end{aligned}$$



Lineare und zyklische Korrelation



Lineare und zyklische Faltung



Zyklische Faltung und Korrelation für endliche Sequenzen der Dimension 4

$$\mathbf{x}^T = [4 \ 2 \ 1 \ 3] \quad \mathbf{y}^T = [1 \ 3 \ 2 \ 0]$$

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})^T = [15 \ 20 \ 15 \ 10]$$

$$(\mathbf{x} \# \mathbf{y})^T = [12 \ 11 \ 18 \ 19]$$

$$\mathbf{x}^T = [4 \ 2 \ 1 \ 3]$$

$$\mathbf{y}^T = [1 \ 3 \ 2 \ 0]$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{x}^T = [4 \ 2 \ 1 \ 3] \\ \mathbf{y}^T(-n) = [1 \ 0 \ 2 \ 3] \\ \hline \langle \cdot, \cdot \rangle \quad 4+0+2+9=15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{x}^T = [4 \ 2 \ 1 \ 3] \\ \mathbf{y}^T(1-n) = [3 \ 1 \ 0 \ 2] \\ \hline \langle \cdot, \cdot \rangle \quad 12+2+0+6=20 \end{array}$$

$$\mathbf{x}^T = [4 \ 2 \ 1 \ 3]$$

$$\mathbf{y}^T = [1 \ 3 \ 2 \ 0]$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad 4+6+2+0=12$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{x}^T = [4 \ 2 \ 1 \ 3] \\ \mathbf{y}^T(n-1) = [0 \ 1 \ 3 \ 2] \\ \hline \langle \cdot, \cdot \rangle \quad 0+2+3+6=11 \end{array}$$

Faltung und Korrelation

Skalarprodukt (Ähnlichkeit) von Originalsignal oder
gespiegelmtem Signal in allen translatorischen
Positionen !!

Demos zur Faltung

Eigene Dateien\ppt\Lehre\DBV-I\Faltung\disfaltung.html und convolution_demo.htm

[disfaltung](#)

und Aufruf von convolution.m in Matlab!

[C:\Dokumente und Einstellungen\burkhard\Eigene Dateien\ppt\Lehre\DBV-I\matlab-convolution.bat](#)

Zyklische Faltung und Korrelation als Matrixprodukt

Als *lineare* Operationen formuliert mit Matrixprodukt mit zyklischen Matrizen:

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}(-n)) \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} \# \mathbf{y} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}^*) \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{N-1} \\ x_{N-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{N-2} \\ x_{N-2} & x_{N-1} & x_0 & \cdots & x_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{bmatrix} \quad \text{Multiplikation mit einer Zirkulanten}$$

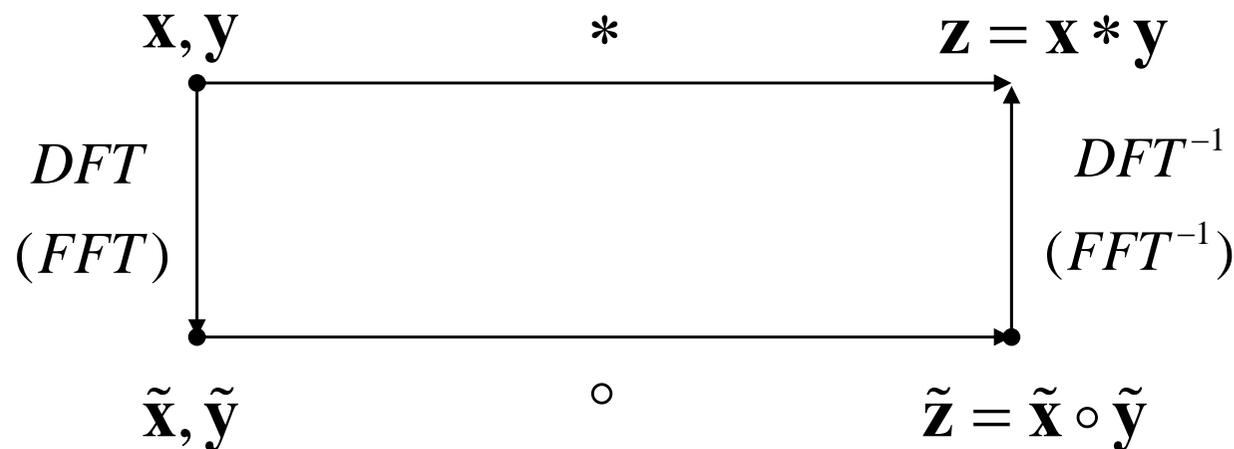
Z.B. für N=4:

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 & y_3 & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_3 & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 & y_3 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \# \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_3 & y_0 & y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 & y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_0 \end{bmatrix}^* \cdot \mathbf{x}$$

Isomorphie der diskreten Fouriertransformation mit der *zyklischen* Faltung

$$\boxed{\mathbf{x} * \mathbf{y} \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} \tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{y}}}$$

DFT-Korrespondenzen mit der zyklischen Faltung: Abbildung auf das direkte Produkt (kommutativ) im Spektralbereich (Beweis einfach mit nachfolgenden Regeln)

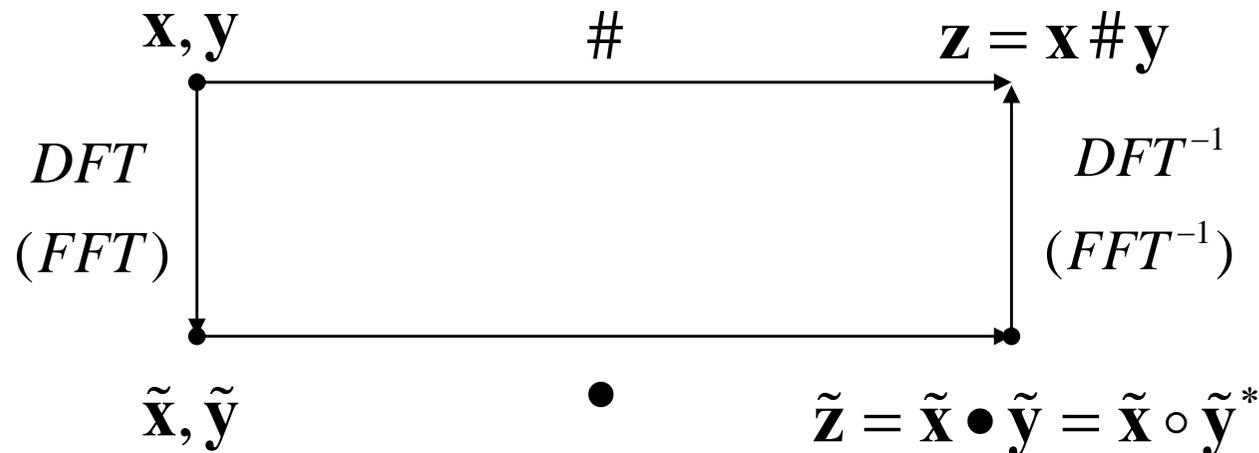


Isomorphie der diskreten Fouriertransformation mit der *zyklischen* Korrelation

$$\boxed{\mathbf{x} \# \mathbf{y} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} \quad \tilde{\mathbf{x}} \bullet \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{y}}^*}$$

mit der nichtkommutativen Verknüpfung \bullet :
 $a \bullet b = a \cdot b^*$

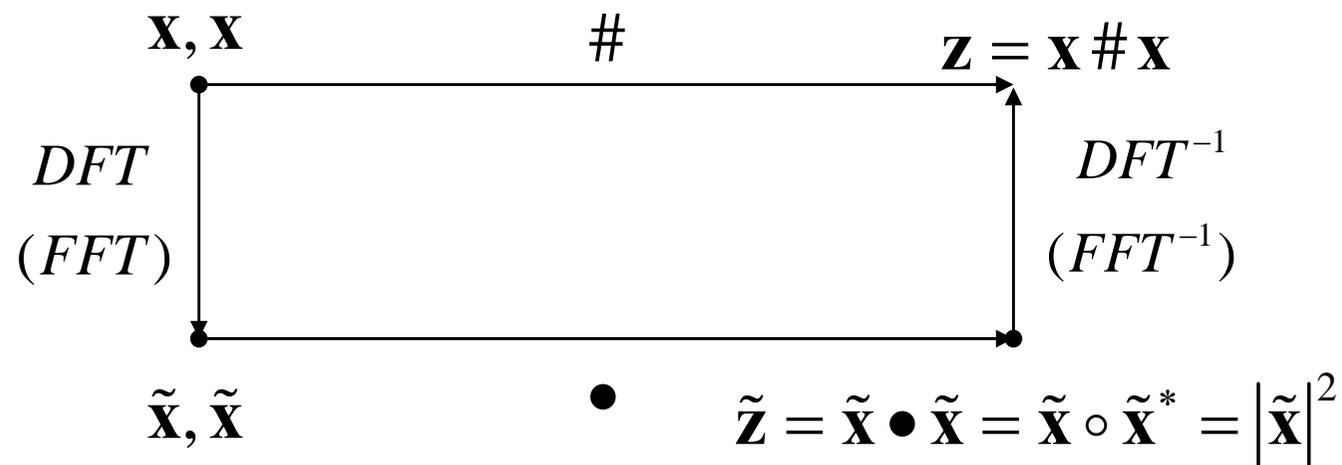
DFT-Korrespondenzen mit der zyklischen Korrelation: Abbildung auf das nichtkommutative „konjugierte Produkt“ im Spektralbereich (ähnlich wie das Skalarprodukt).



Und daraus für $y=x$ die Wiener-Khintchine-Beziehung

$\mathbf{x} \# \mathbf{x}$	$\begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array}$	$\tilde{\mathbf{x}} \bullet \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{x}}^* = \tilde{\mathbf{x}} ^2$
Autokorrelierte	$\begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array}$	Leistungsspektrum

bzw: $\mathbf{x} \# \mathbf{x} = \mathcal{F}^{-1}(|\tilde{\mathbf{x}}|^2)$



Eigenschaften der DFT

$$\boxed{\mathbf{x}(n) \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} \tilde{\mathbf{x}}(k)}$$

1) $\frac{1}{N} \tilde{\mathbf{x}}(n) \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} \mathbf{x}(-k)$ Symmetrie ($2 \times DFT \Rightarrow$ Spiegelung)

2) $\boxed{\mathbf{x}(n - \nu) \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} \tilde{\mathbf{x}}(k) \circ \mathbf{w}_\nu^*}$ Verschiebungssatz

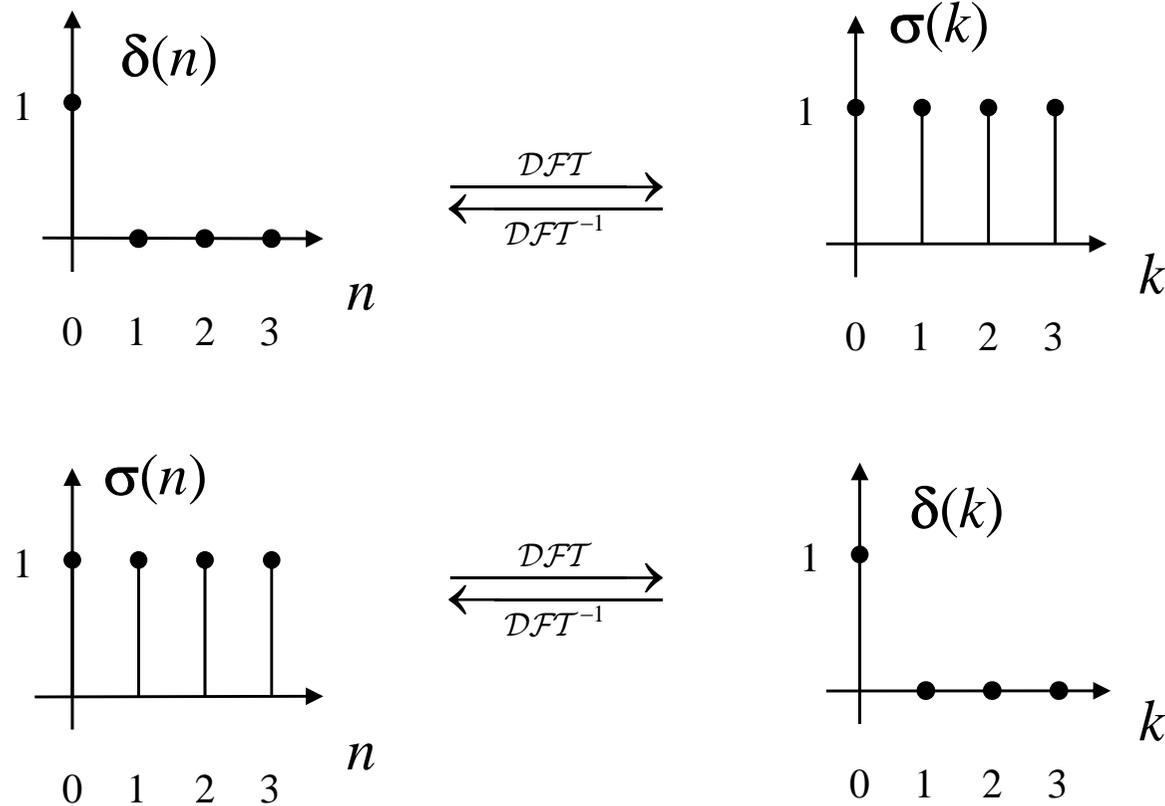
3) $\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} (\mathbf{W} \tilde{\mathbf{x}}^*)^*$ altern. Rücktr. (als Hintr.)

4) $\mathbf{x}^*(n) \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} \tilde{\mathbf{x}}^*(-k)$

$\mathbf{x}(-n) \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} \tilde{\mathbf{x}}(-k)$

Weitere Eigenschaften in Analogie zur kont. Fouriertransformation
(Linearität, ...)

Signalkorrespondenzen



$\delta(n) \cong$ Einselement der Faltung

$\sigma(n) \cong$ Einselement der direkten Multiplikation (für kausale Signale)

$$\sigma \circ \mathbf{x} = \delta * \mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Signalkorrespondenzen

Exponentialfolge aus
Verschiebungssatz:

$$\begin{array}{ccc} \delta(n - \nu) & \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} & \sigma \circ \mathbf{w}_\nu^* = \mathbf{w}_\nu^* \\ \mathbf{w}_\nu^* & \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} & \delta(k - \nu) \end{array}$$

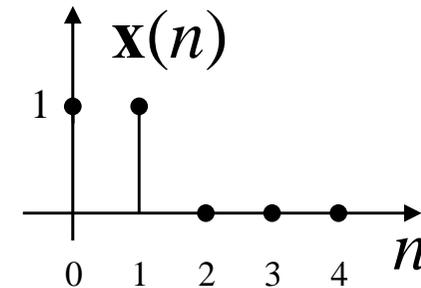
Verschieben einer Folge durch Faltung mit verschobenem δ -Impuls:

$$\mathbf{x}(n) * \delta(n - \nu) \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{array} \tilde{\mathbf{x}}(k) \circ \mathbf{w}_\nu^* \begin{array}{c} \xrightarrow{DFT^{-1}} \\ \xleftarrow{DFT} \end{array} \mathbf{x}(n - \nu)$$

Berechnung der AKF, direkt u. über DFT

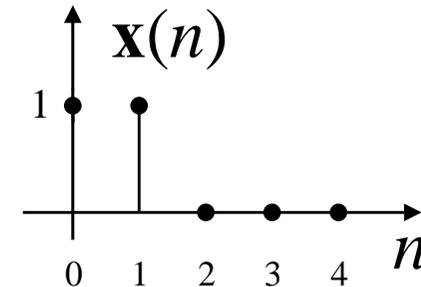
Beispiel für $N=4$:

a) direkt: $\mathbf{x}(n) \# \mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

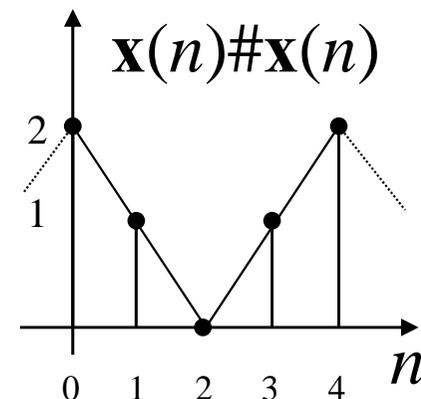


b) über: $\mathbf{x} \# \mathbf{x} = DFT^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{x}}^*)$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

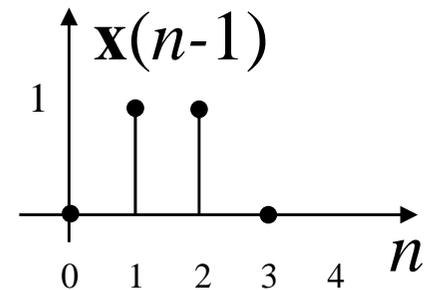
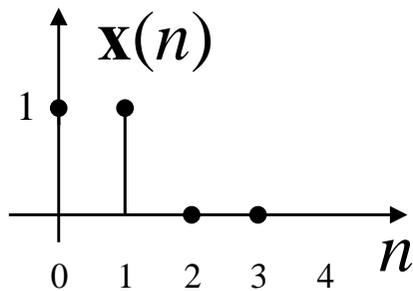


$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-j \\ 0 \\ 1+j \end{bmatrix} \quad |\tilde{\mathbf{x}}|^2 = \tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{x}}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{x}(n) \# \mathbf{x}(n) = \frac{1}{4} \mathbf{W}^{-1} \cdot \underbrace{\tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{x}}^*}_{|\tilde{\mathbf{x}}|^2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 4+2j-2j \\ 4-2-2 \\ 4-2j+2j \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel für den Verschiebungssatz mit $N=4$



$$\boxed{\widetilde{\mathbf{x}(n-1)} = \tilde{\mathbf{x}} \circ \mathbf{w}_1^*} \quad \text{wobei: } \mathbf{w}_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ +j \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} \circ \mathbf{w}_1^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-j \\ 0 \\ 1+j \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ +j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1-j \\ 0 \\ -1+j \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{x}(n-1)}$$

Zweidimensionale Faltung und Korrelation

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{X}(k,l) * \mathbf{Y}(k,l))(q,r) \\
 &= \langle \mathbf{X}(k,l), \mathbf{Y}^*(q-k, r-l) \rangle \\
 &= \sum \sum \mathbf{X}(k,l) \mathbf{Y}(q-k, r-l)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \circ \\
 \downarrow \text{DFT} \\
 \bullet \\
 \tilde{\mathbf{X}} \circ \tilde{\mathbf{Y}}
 \end{array}$$

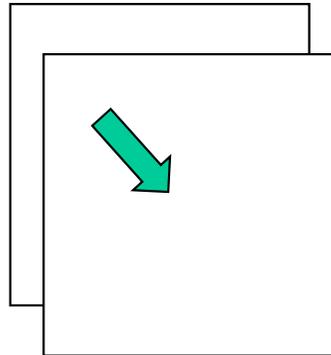
$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{X}(k,l) \# \mathbf{Y}(k,l))(q,r) \\
 &= \langle \mathbf{X}(k,l), \mathbf{Y}(k-q, l-r) \rangle \\
 &= \sum \sum \mathbf{X}(k,l) \mathbf{Y}^*(k-q, l-r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \circ \\
 \downarrow \text{DFT} \\
 \bullet \\
 \tilde{\mathbf{X}} \circ \tilde{\mathbf{Y}}^*
 \end{array}$$

$ \begin{aligned} \mathbf{X} * \mathbf{Y} &= \text{DFT}^{-1}(\tilde{\mathbf{X}} \circ \tilde{\mathbf{Y}}) \\ \mathbf{X} \# \mathbf{Y} &= \text{DFT}^{-1}(\tilde{\mathbf{X}} \circ \tilde{\mathbf{Y}}^*) \end{aligned} $
--

2D-Faltung und Korrelation

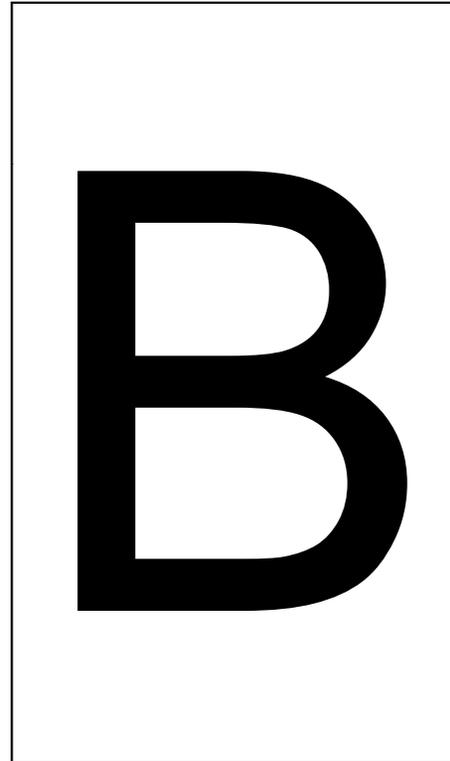
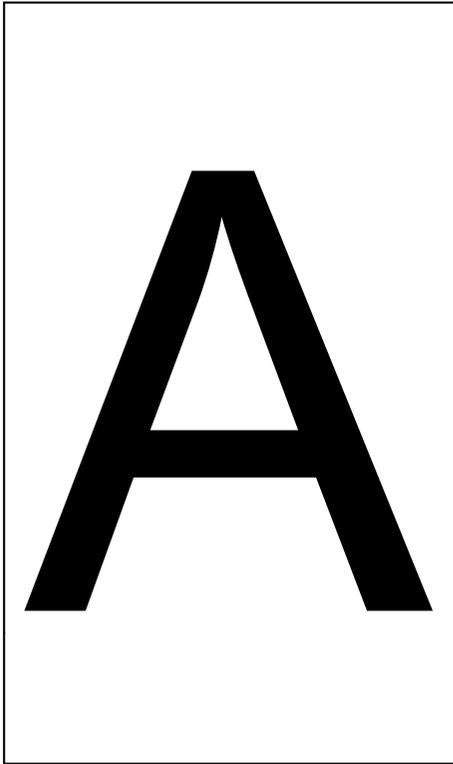
2D-Korrelation



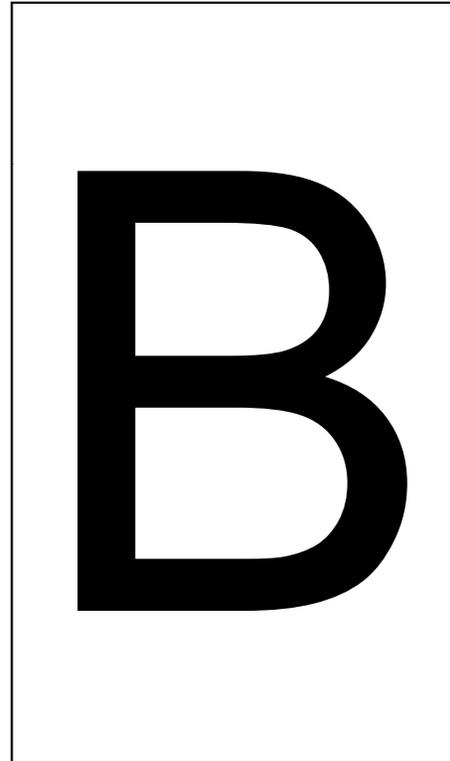
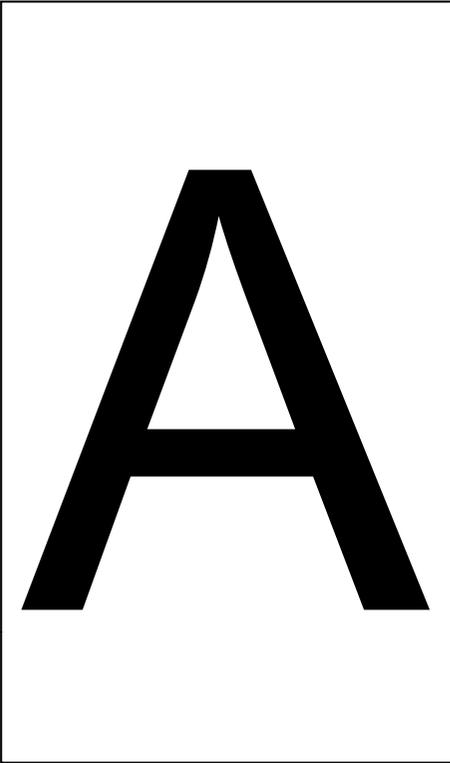
2D-Faltung



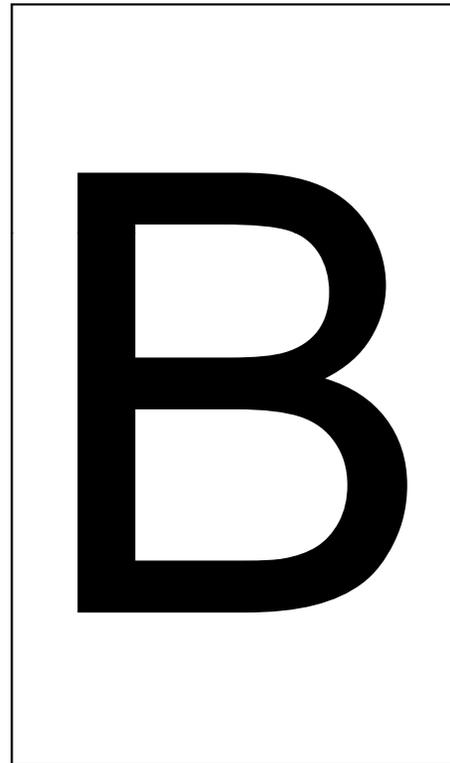
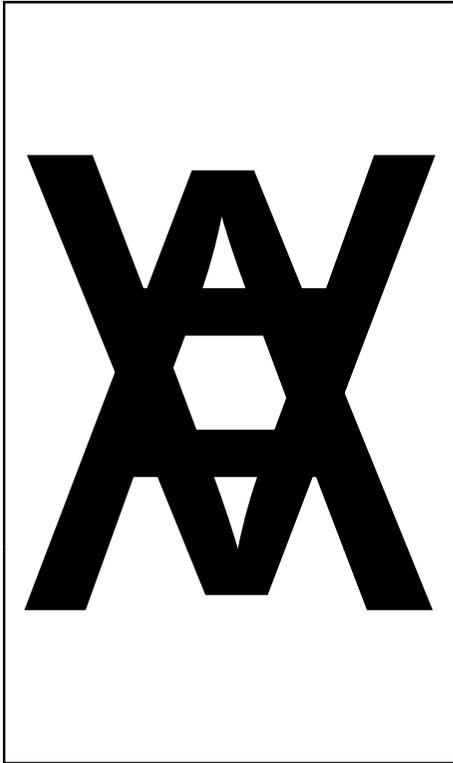
2D-Korrelation



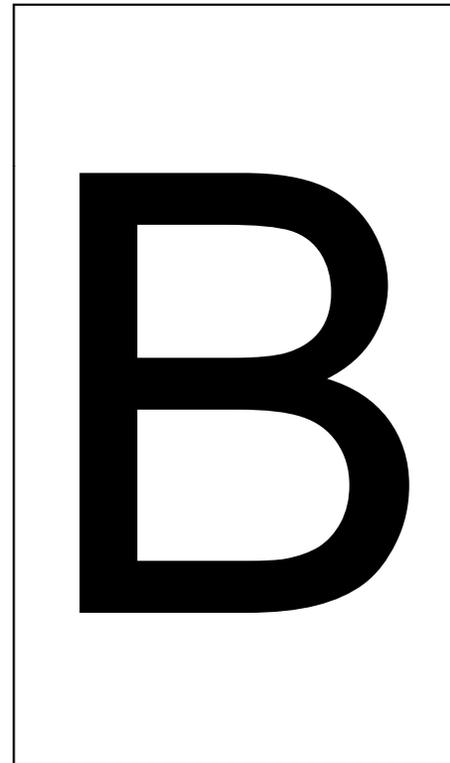
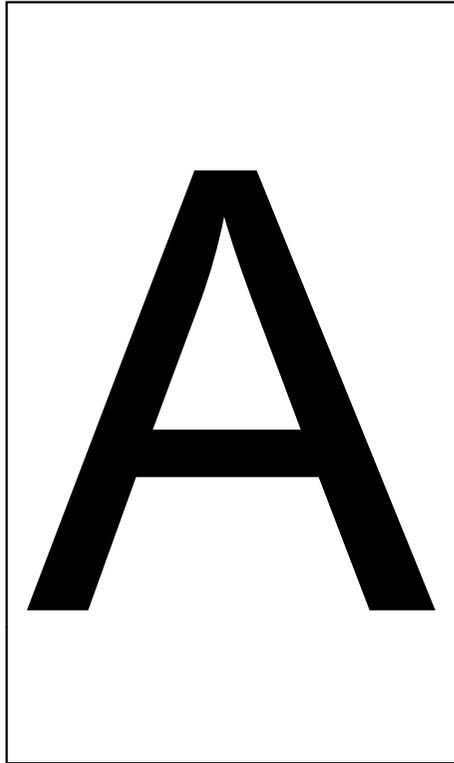
2D-Korrelation



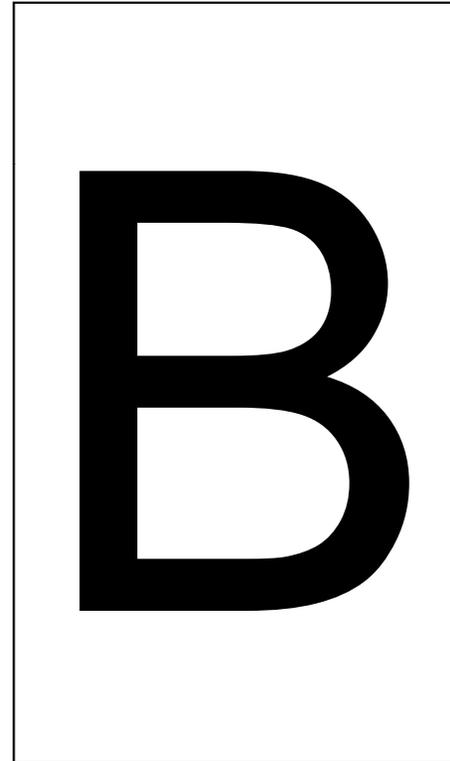
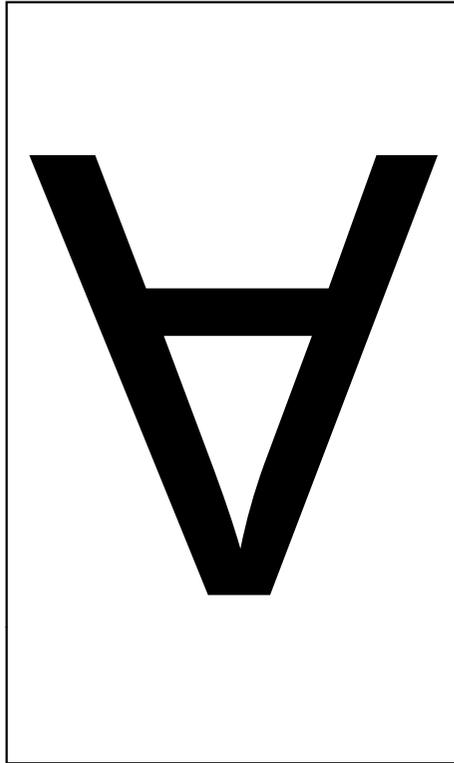
2D-Faltung



2D-Faltung



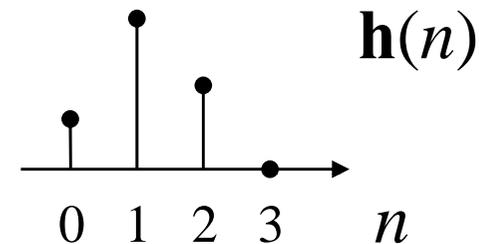
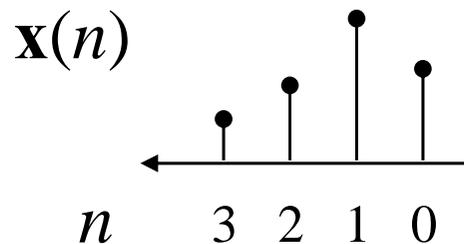
2D-Faltung



Schnelle lineare Faltung und Korrelation für Sequenzen endlicher Länge

Prinzip: Formulierung der *linearen* Faltung und Korrelation als *zyklische* Operation; dann Anwendung der FFT. Trotz „Umweg“, wesentlich geringere Komplexität!

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{h}(n) * \mathbf{x}(n)$$

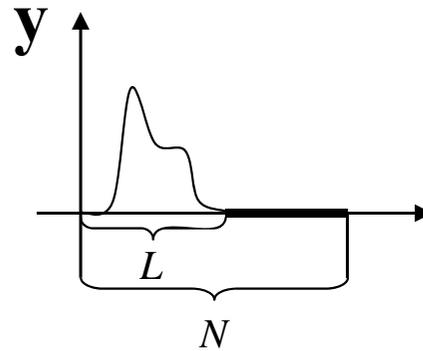
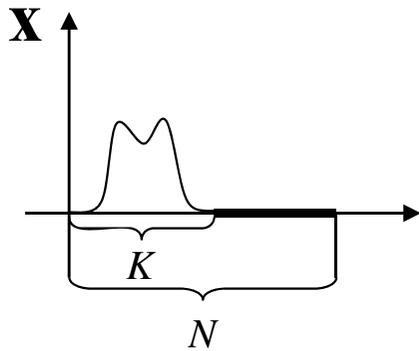


$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Lineare Faltung durch Multiplikation mit einer Toeplitz-Matrix

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Erweiterung mit Nullen, so dass zyklische Matrix u. Faltung entsteht



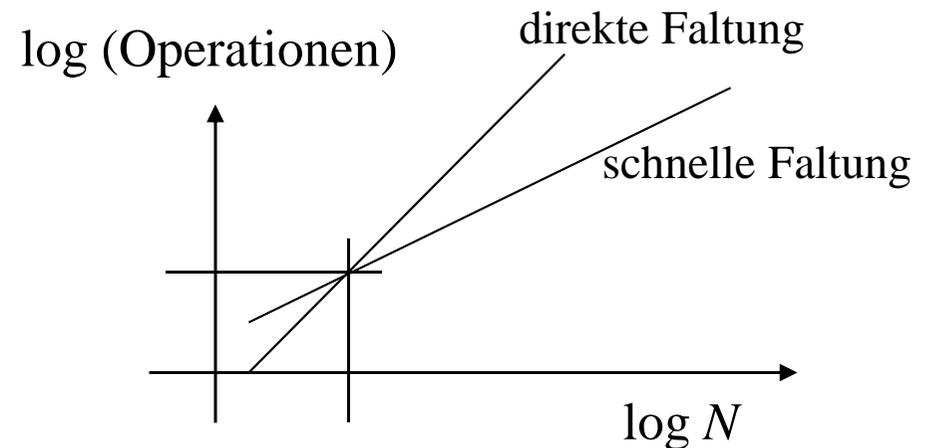
$$N = 2^n \geq K + L - 1$$

Bedingung, ohne dass Faltungsfehler entstehen (beide Signale müssen nebeneinander in das Fenster passen!)

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = FFT^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{y}}) = FFT^{-1}(FFT(\mathbf{x}) \circ FFT(\mathbf{y}))$$

$$\mathbf{x} \# \mathbf{y} \begin{matrix} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{DFT^{-1}} \end{matrix} \tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{y}}^*$$

Trotz „Umweg“, wesentlich geringere Komplexität! ($O(N \log N)$ anstatt $O(N^2)$ bei der direkten Realisierung aller Skalarprodukte)



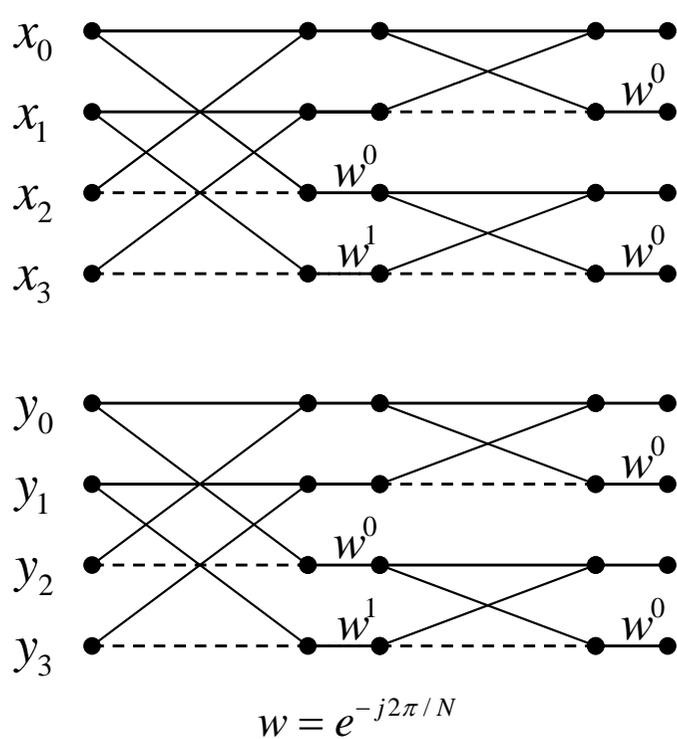
Korrelation zweier reeller Folgen: \mathbf{x}, \mathbf{y} transformieren, verteilt in Real- und Imaginärteil einer komplexen FFT, dann Rücktransformation.

Schnelle Faltung/**Korrelation** ohne Scrambling

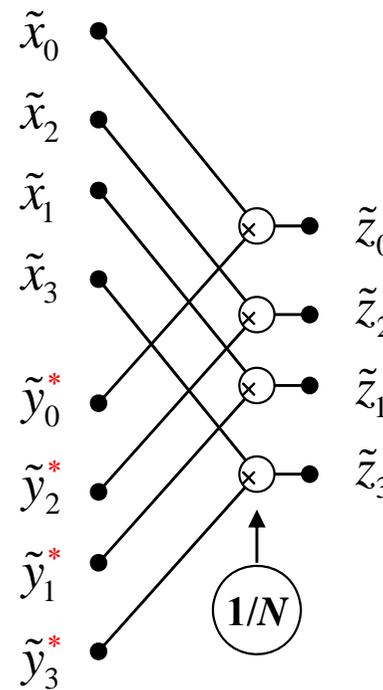
$$\mathbf{z} = \mathbf{x} * \mathbf{y} = FFT^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{y}})$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \# \mathbf{y} = FFT^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{y}}^*)$$

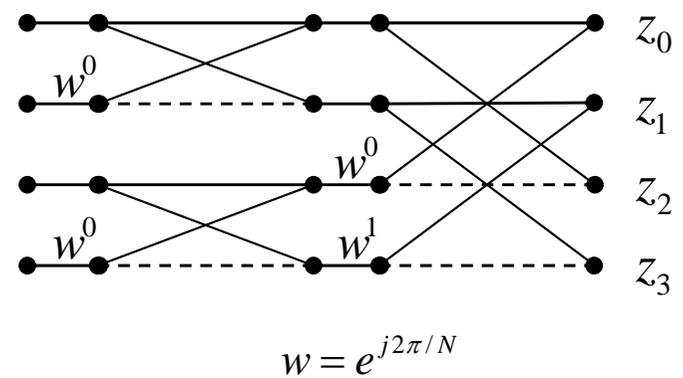
Sande-Tukey



FFT



Cooley-Tukey



FFT^{-1}