

Kap. 7: Wavelets

1. Die kontinuierliche Wavelet-Transformation (WT)
2. Diskrete Wavelet-Transformation (DWT)
3. Schnelle Wavelet-Transformation (FWT)
4. JPEG2000

Wavelets - Grundsätzliches

(Wellchen, kleine Welle)

- Wavelets sind wellenförmige, beschränkte Funktionen, welche außerhalb eines Intervalls verschwinden. Daraus kann eine Basis in $L_2(\mathbb{R})$ aufgebaut werden.
- Aus einem *Mutterwavelet* $\psi(t)$ wird eine ganze Familie von Wavelets durch Skalierung s und Verschiebung u abgeleitet:

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

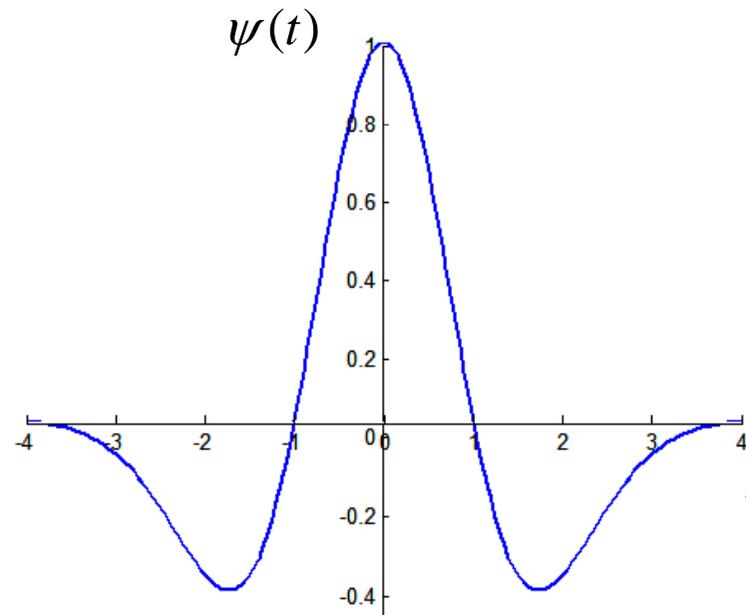
- Wavelets $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ erfüllen die sogenannte Zulässigkeitsbedingung:

$$0 < c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

- Daraus ergibt sich die notwendige Bedingung, dass Wavelets mittelwertfrei sind:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

Mexican-Hat-Wavelet

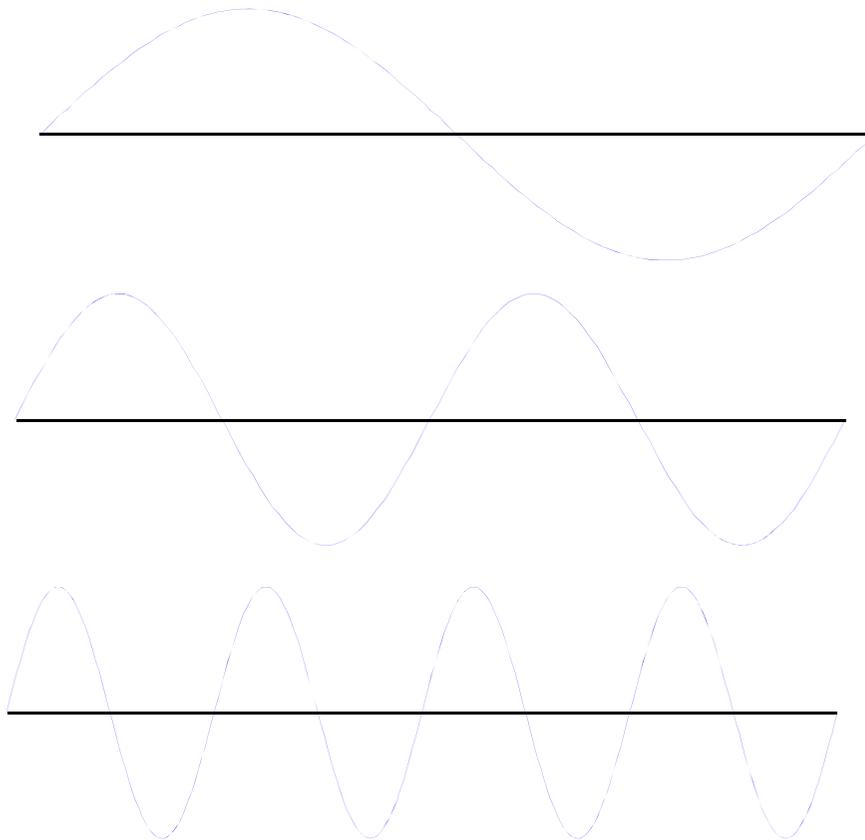


$$\psi(t) = -\gamma \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{-t^2/2} \right) = \gamma(1-t^2)e^{-t^2/2}$$

Zweite Ableitung des Gauss-Filters

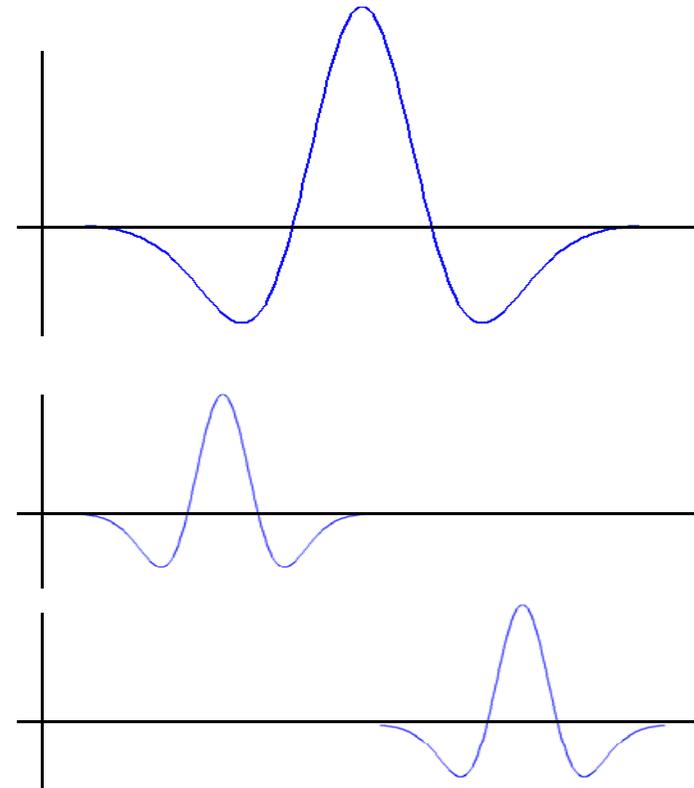
$$\text{mit: } \gamma = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3}}$$

Frequenz-Analyse



Globale Basisfunktionen. Auflösung nur bzgl. Frequenz. Geeignet zur Analyse *stationärer* Signale.

Wavelet-Analyse



Multiskalenauflösung bzgl. *Ort* und *Frequenz*. Geeignet zur Analyse von *instationären* Signalen.

Die kontinuierliche Wavelettransformation

- Hintransformation (Funktion von Translation u und Skalierung s):

$$\mathcal{W}f(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

- Rücktransformation:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}f(u, s) \psi_{s,u}(t) du \frac{ds}{s^2}$$

Eigenschaften der kontinuierlichen Wavelettransformation

Die kontinuierliche Wavelet-Transformation ist hoch *redundant* und damit auch sehr aufwendig. Dies zeigt sich in der Tatsache, dass eine eindimensionale Funktion $f(t)$ durch eine zweidimensionale Funktion $\mathcal{W}f(u,s)$ dargestellt wird.

Die Funktionenfamilie $\psi_{s,u}(t)$ ist bei kontinuierlicher Parametrisierung lediglich ein *Erzeugendensystem* und keine Basis in $L_2(\mathbb{R})$.

Ein Erzeugendensystem eines Vektorraums V ist eine Teilmenge B mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor von V sich als Linearkombination aus B darstellen lässt (die Elemente von B spannen den Raum auf).

Diskrete Wavelet-Basen

- Eine Entwicklung nach Wavelet-Basen ist eine Möglichkeit der Zerlegung in Bezug auf den *Ort* und die *Frequenz*.
- Wavelet-Basen werden rekursiv abgeleitet. Sie sind damit *selbstähnlich* und erlauben eine Multiskalen-Analyse (MSA).
- Damit ist die Wavelet-Transformation im Gegensatz zur Fourier-Transformation (Basisfunktionen erstrecken sich global auf den gesamten Definitionsbereich) insbesondere zur Analyse *instationärer* Signale und Bilder geeignet.
- Für leistungsfähige Anwendungen von Wavelets ist eine niedrige Redundanz essentiell. Aus diesem Grunde sind Waveletfamilien, die eine *orthogonale* Basis bilden, von hohem Interesse.

Die diskrete Wavelettransformation (DWT)

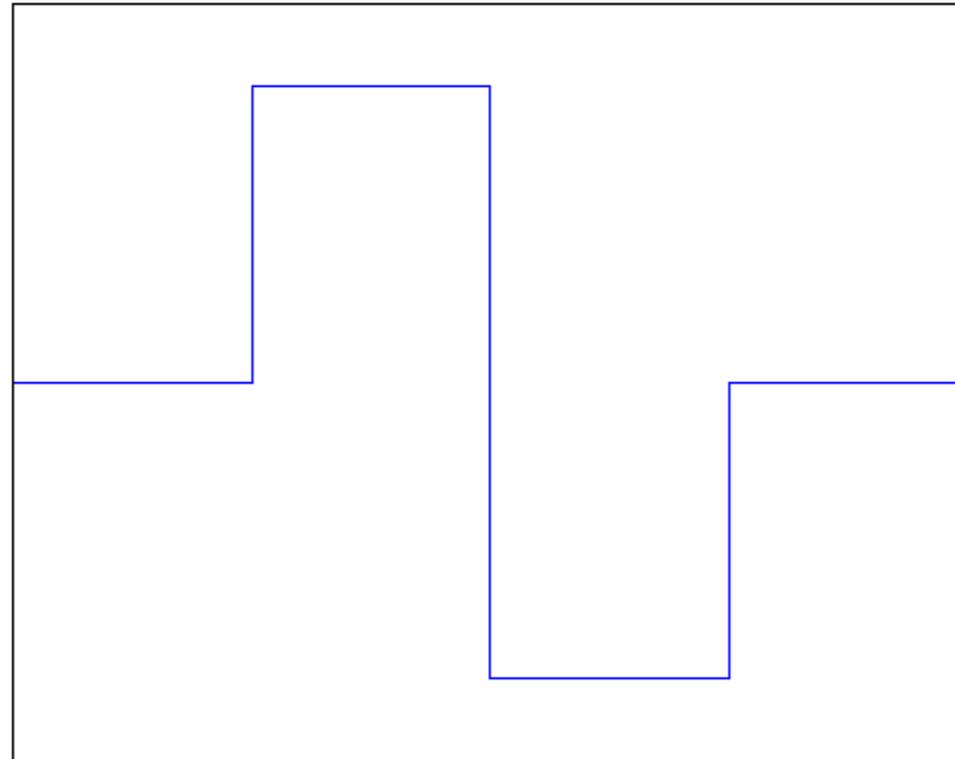
Bei der diskreten Wavelettransformation wird die Redundanz und damit auch der Aufwand der kontinuierlichen WT dadurch verringert, dass man sich auf eine Teilmenge der Wavelets durch eine *diskrete* Menge von Translationen und Skalierungen (Zweierpotenz-Schritte) reduziert (*dyadische* Wavelets).

Man erhält eine orthogonale Basis, ausgehend von einem Mutterwavelet $\psi_{0,0}(t)$:

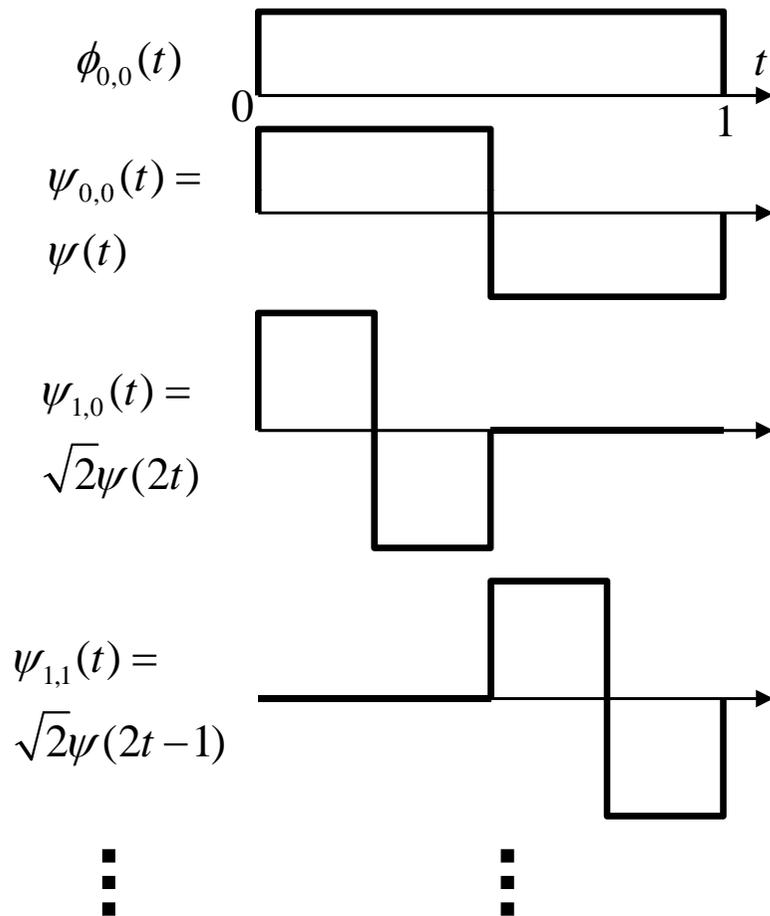
$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \psi_{0,0}\left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) = 2^{j/2} \psi_{0,0}(2^j t - k) \quad \begin{cases} j \in \mathbb{Z} \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1 \end{cases}$$

Haar-Wavelets

Haar - Wavelet



Haar-Wavelets



Das orthonormale und vollständige System der Haar-Wavelets

$\phi_{0,0} \equiv 1$ (Skalierungsfunktion/Vater-Wavelet)

$\psi(t) = \psi_{0,0}(t) = \begin{cases} +1 & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$ Mutter-Wavelet

$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \begin{cases} j \in \mathbb{Z} \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1 \end{cases}$

Haar-Wavelet-Transformation

$\{\psi_{j,k}, \phi\}$ spannen den Raum $L_2[0, T)$ auf. Somit ergibt sich für jede Funktion $f(t) \in L_2[0, T)$:

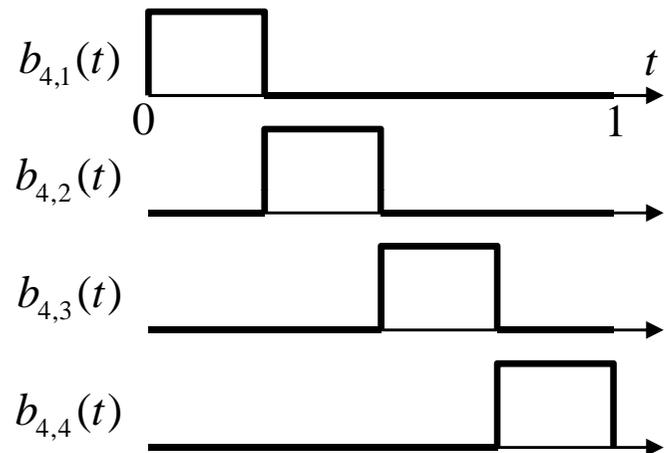
Synthese
$$f(t) = \sum_j \left(\sum_k (w_{j,k} \psi_{j,k}(t)) \right) + c_0 \phi(t)$$

Analyse
$$w_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_0^T f(t) \psi_{j,k}(t) dt$$
$$c_0 = \langle f(t), \phi(t) \rangle = \int_0^T f(t) \phi(t) dt$$

Alternativer Zugang zu den Haar-Wavelets

Ableitung von dem System der Blockimpulse

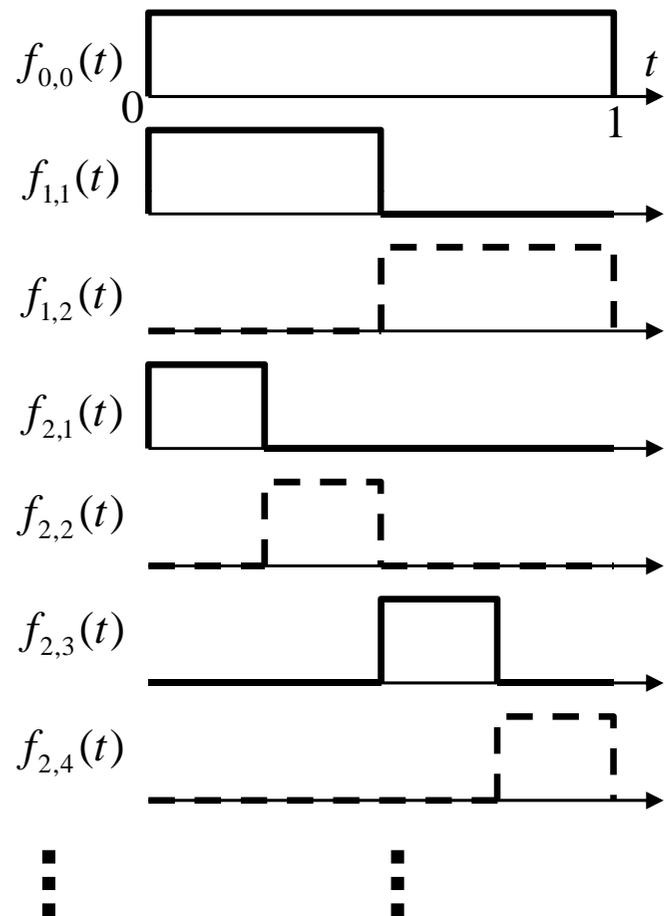
Orthonormale Blockimpulse



- orthonormal
- nicht vollständig

$$b_{k,i}(t) = \begin{cases} \sqrt{k} & \text{für } \frac{i-1}{k} < t < \frac{i}{k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Erweitertes System von Blockimpulsen durch *Mutiskalen-Vervollständigung*



Das System der Blockimpulse kann durch *Skalierung* und *Translation* vervollständigt werden. Bei der Erweiterung müssen die linear abhängigen Terme (gestrichelt) eliminiert werden.

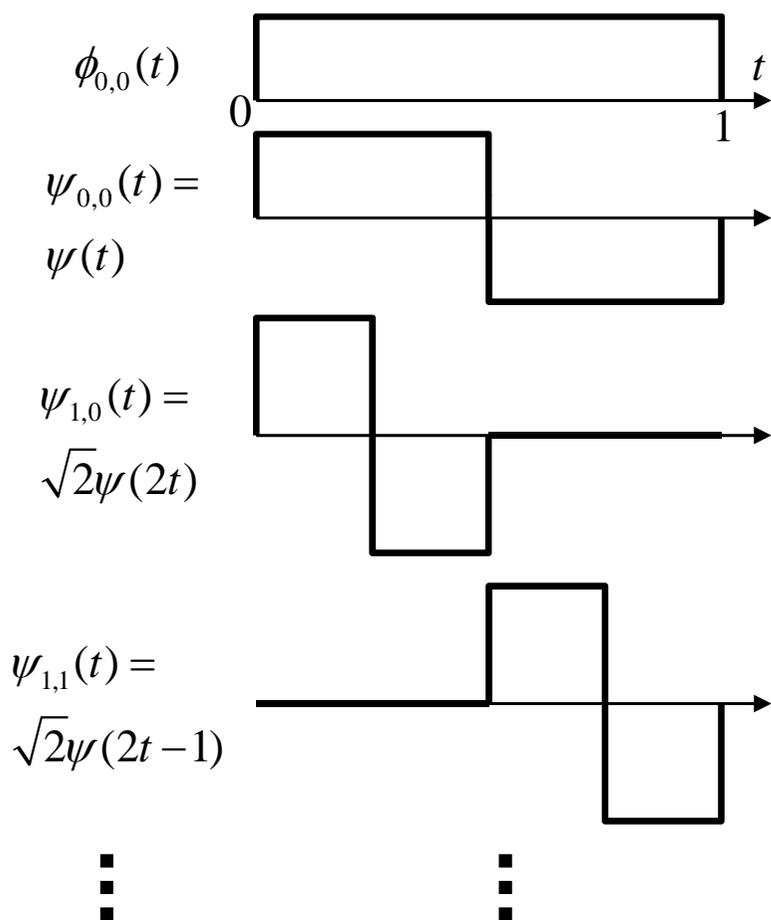
- nicht orthonormal
- vollständig

$$f_{k,i}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{i-1}{2^k} < t < \frac{i}{2^k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, 2^k$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Haar-Wavelets durch Gram-Schmidt-Orthonormalisierung der erweiterten Blockimpulse



Das erweiterte System der linear unabhängigen Blockimpulse geht durch *Gram-Schmidt-Orthonormalisierung* auf die orthonormalen Haar-Wavelets über. Sie sind:

- orthonormal und
- vollständig

$$\phi_{0,0} \equiv 1$$

$$\psi(t) = \psi_{0,0}(t) = \begin{cases} +1 & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

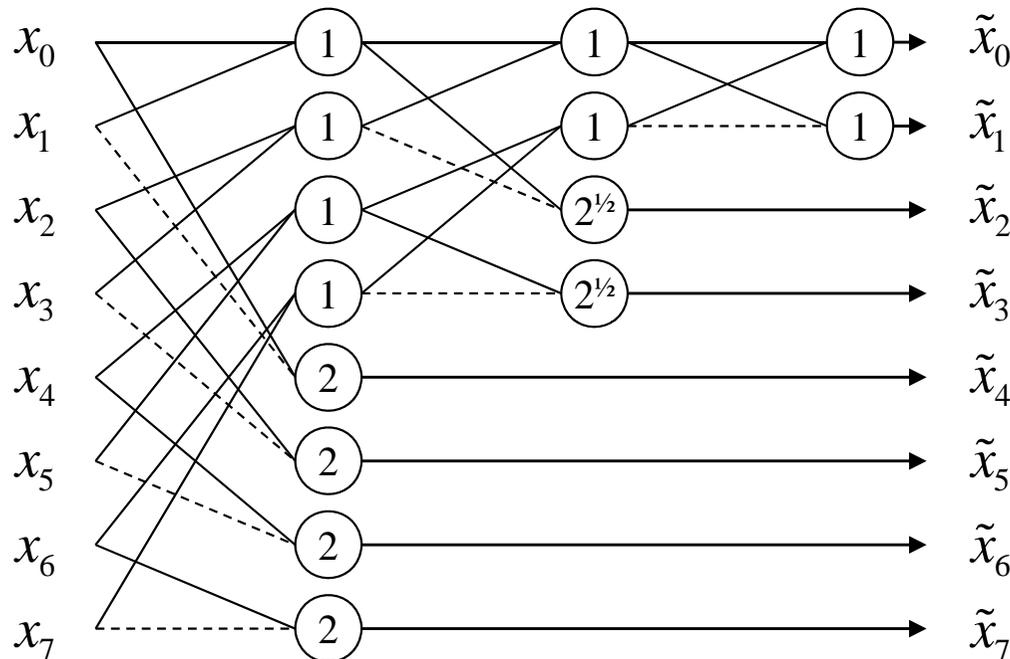
$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad \begin{cases} j \in \mathbb{Z} \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1 \end{cases}$$

Schnelle Wavelet-Transformation

FWT

- Die DWT-Matrix ist i.a. nicht dünn besetzt. Somit haben wir die selbe Komplexitätsproblematik zu lösen, wie bei der diskreten Fouriertransformation. Wir lösen es ebenfalls durch Faktorisierung der DWT in ein Produkt von $l d N$ dünn besetzter Matrizen unter Ausnutzung der Selbstähnlichkeit der Wavelets. Daraus resultiert ein Algorithmus von nur *linearer* Komplexität $O(N)$. Dies ist die von Mallat and Daubechies definierte schnelle DWT \Rightarrow FWT.
- Die schnelle Wavelet-Transformation (engl. Fast Wavelet Transform, FWT) kann auch als ein Algorithmus definiert werden, der mit Hilfe der Theorie der Multiskalenanalyse die diskrete Wavelet-Transformation implementiert. Dabei wird das Bilden des inneren Produkts des Signals mit jedem Wavelet durch das sukzessive Zerteilen des Signals in Frequenzbänder ersetzt. Dadurch wird die Komplexität der Wavelet-Transformation von $O(N \log N)$ (vgl. schnelle Fourier-Transformation) auf $O(N)$ reduziert.

Schnelle Haar-Wavelet-Transformation

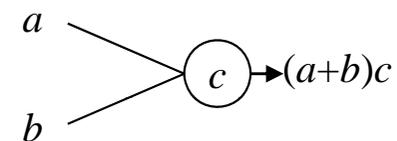
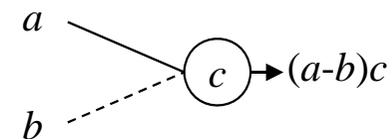


$$\mathbf{HWT}_8 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Die Berechnungskomplexität ist linear!

$$N + N/2 + N/4 + \dots + 2 = N \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 2(N-1) = \boxed{O(N)}$$

mit: $N = 2^n$



Faktorisierung der Haar-Wavelet-Transformation

$$\mathbf{HWT}_8 = \mathbf{HWT}_8^{(3)} \cdot \mathbf{HWT}_8^{(2)} \cdot \mathbf{HWT}_8^{(1)}$$

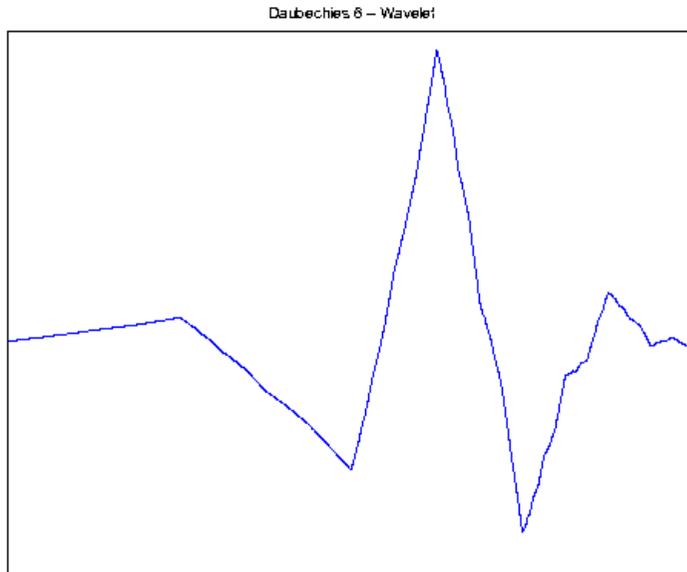
$$\mathbf{HWT}_8 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HWT}_8^{(3)} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HWT}_8^{(2)} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HWT}_8^{(1)} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Weitere Wavelet - Beispiele



Daubechies 6

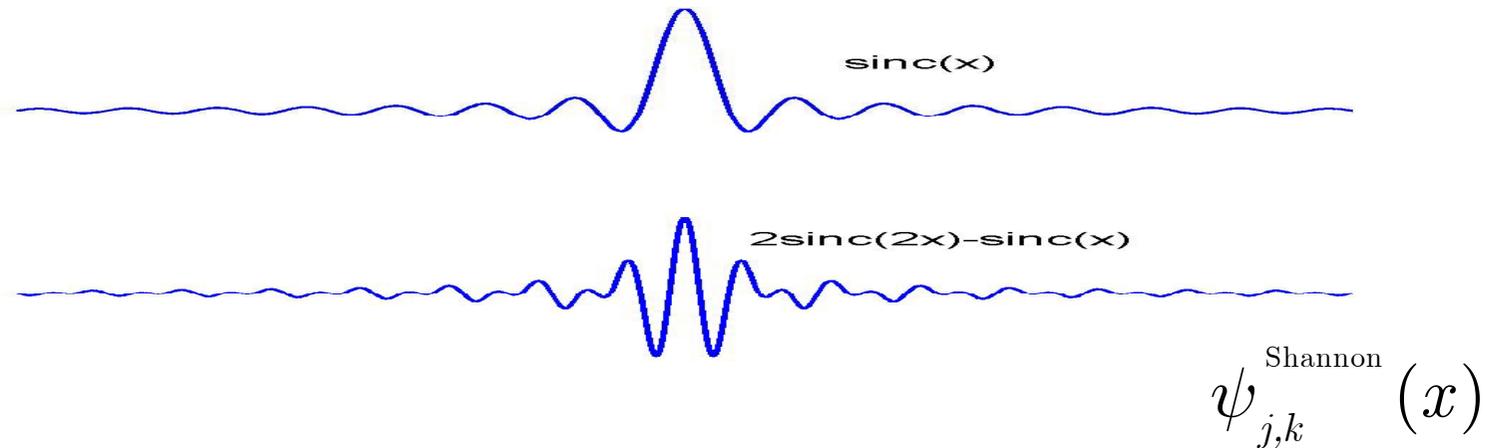


Daubechies 8

Shannon Wavelets

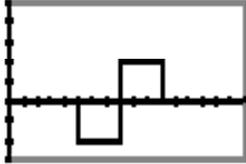
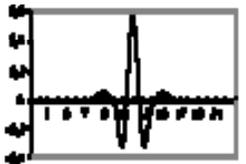
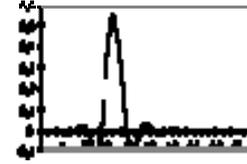
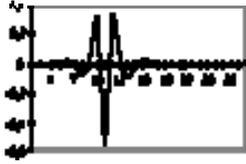
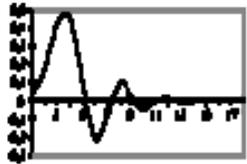
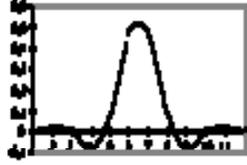
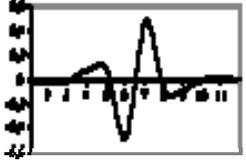
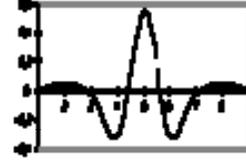
- The Shannon's "aperture" function is:

$$\psi_{j,k}^{\text{Shannon}}(x) = 2 \operatorname{sinc}(2x) - \operatorname{sinc}(x).$$



- Theorem:

$$\{\psi_{j,k}^{\text{Shannon}}(x) : j, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{is an orthonormal basis of } L_2(\mathbb{R}).$$

Filterklasse	Skalierungs-Funktion ϕ	Wavelets ψ	Beschreibung
Haar			Einfachste Filterklasse, Mittelwert- und Differenzfilter
CloseToCoiflet			
Coiflet			Frühe Waveletklasse, entwickelt von R.Coifman
Daubechies			nicht symmetrisch, streng orthogonal, strenger "compact support" , selbstähnlich
Johnston-Barnard			
Biorthogonal-Spline			symmetrisch, werden aus Binomialkoeffizienten berechnet

Zweidimensionale Wavelets mit separierbarem Kern

Zweidimensionale Waveletbasen können durch das kartesische Produkt eindimensionaler Waveletbasen erzeugt werden:

$$\psi_{j,k}(t_1, t_2) = \psi_j(t_1) \cdot \psi_k(t_2)$$

JPEG 2000

- Nachfolgestandard von JPEG
- Bessere Bildqualität, insbes. bei mittleren und hohen Kompressionsraten
- Wavelets (DWT) anstatt DCT
(Die Wavelet-Transformation wird auf das ganze Bild angewendet und nicht nur auf Teilbilder der Größe 8×8 , damit Wegfall der Block-Effekte)

Original



JPEG 0,5 Bit/pixel
MSE: 74



JPEG2000 0,5 Bit/pixel
MSE: 37,4



Original



JPEG 0,3 Bit/pixel
MSE: 150



JPEG2000 0,3 Bit/pixel
MSE: 73

