

# Computer Vision I





Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,  
Universität Freiburg,





# Literatur

-  Richard Hartley and Andrew Zisserman. *Multiple View Geometry in computer vision*, Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> Ed., 2003.
-  O.D. Faugeras and Q.-T.Luong. *The Geometry of Multiple Images*, MIT Press 2001.
-  D.A.Forsyth and J. Ponce. *Computer Vision a modern approach*, Prentice Hall 2003.
-  J.G. Semple and G.T. Kneebone. *Algebraic Projective Geometry*, Clarendon Press. Oxford Classic Texts 1998.



# Erklärung

Die meisten in den Folien dieser Vorlesung verwendeten Abbildungen stammen aus dem Buch



Richard Hartley and Andrew Zisserman. *Multiple View Geometry in computer vision*, Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> Ed., 2003.



# Einleitung - Motivation - Beispiele

- 40 jährige Geschichte
- Rechnersehen eigentl. weit umfassender Begriff. Hier: Betonung auf Geometrie
- Beziehungen zwischen Raumkoordinaten von Objektpunkten, -Geraden etc., deren Bildkoordinaten auf verschiedenen Bildern und den Parametern der abbildenden Kameras.
- Algebraische Trennung zwischen Objektdaten und Kameradaten (Parametern)- führt bei mehreren Kameras auf neuen technisch/mathematischen Begriff - die Tensoren, welche alle Parameter einer Gruppe von Kameras geeignet zu neuen Größen zusammenfassen.

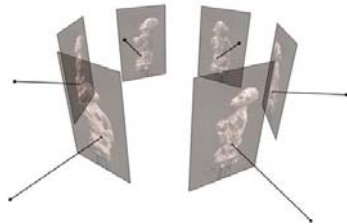


- Zur Motivation:  
Gegeben seien 2 Bilder von einem Objekt und keine andere Information.  
→ Berechne die 3D Position der abgebildeten Punkte und die Kameras, die die Bilder generiert haben.
- 3 Bilder ...

# Szenenrekonstruktion (3D) aus unkalibrierten Bildern

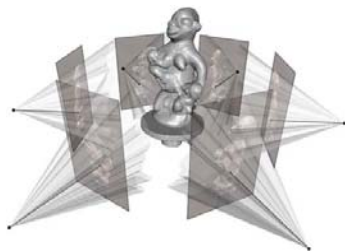


(a) Bilder

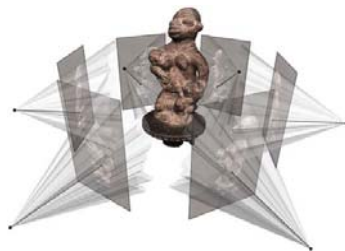


(b) Kamerakoordinaten

# Szenenrekonstruktion (3D) aus unkalibrierten Bildern



(c) Rekonstruktion



(d) Textur

## Robotik: Selbstpositionierung, Objekterkennung, etc.



Abbildung: Nimbro (Freiburg) vs. Osaka



# Automatische Fahrzeuglenkung

Erfordert Realzeit, dynamische 3D Szenenanalyse



Abbildung: VW Touareg Grand Challenge Winner 2005



# Kameraüberwachung



# Projektive Geometrie

## Motivation - Unterschied: Euklidisch - affin - projektiv

- *Die projektive Geometrie kann als Erweiterung der Euklidischen Geometrie verstanden werden.*
- *Eine Erweiterung besteht darin, dass Punkte im Unendlichen rechnerisch erfasst werden können.*
- *Parallele Linien „schneiden“ sich im Unendlichen.*
- *Somit entfällt das **Konzept der Parallelität** in der projektiven Geometrie.*

# Die projektive Gerade $\mathcal{P}^1$

Wir veranschaulichen homogene Punktkoordinaten zunächst im  $\mathcal{P}^1$ .

- Übergang von  $\mathcal{R}^1$  zum  $\mathcal{P}^1$  durch Umwandlung inhomogener Koordinaten zu homogenen Koordinaten

$$x \in \mathcal{R}^1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}^1$$

- Gleichheit bis auf einen Skalenfaktor ( $\sim$ )

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ für } \mathbf{x} \in \mathcal{P}^1$$

- Übergang vom  $\mathcal{P}^1$  zum  $\mathcal{R}^1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{homogene Koord.}} \in \mathcal{P}^1 = y \cdot \begin{pmatrix} x/y \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x/y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{x/y}_{\text{inhomogene Koord.}} \in \mathcal{R}^1$$



- **Punkte im Unendlichen** haben als letzte Komponente die Null.

$$\mathbf{x}_\infty \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Der **Nullvektor**  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  entspricht keinem Punkt.

# Veranschaulichung $\mathcal{P}^1$

Vorstellung:  $\mathcal{P}^1$  eingebettet in den  $\mathcal{R}^2$

Wir können uns alle Vektoren  $k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \forall k$   
als eine Äquivalenzklasse (ein Punkt) vorstellen.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ für } \mathbf{x} \in \mathcal{P}^1$$

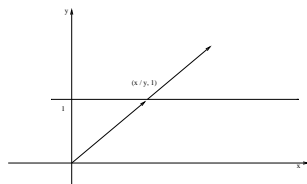


Abbildung: Die projektive Gerade

$\begin{pmatrix} x/y \\ 1 \end{pmatrix}$  kann als Repräsentant dieser Äquivalenzklasse gewählt werden, solange der Punkt nicht im Unendlichen liegt.

# Die Projektive Ebene - Homogene Punktkoordinaten

Übergang vom  $\mathcal{R}^2$  zum  $\mathcal{P}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}^2$$

Gleichheit bis auf einen Skalenfaktor ( $\sim$ )

$$\mathbf{x} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Übergang vom  $\mathcal{P}^2$  zum  $\mathcal{R}^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{homogene Koord.}} = z \cdot \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}^2 \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x/z \\ y/z \end{pmatrix}}_{\text{inhomog. Koord.}} \in \mathcal{R}^2$$

## Homogene Repräsentation von Geraden

Eine Gerade lässt sich im  $\mathcal{R}^2$  durch die Gleichung  $ax + by + c = 0$  beschreiben.  
Die Gerade kann durch den Vektor  $\mathbf{l} = ( a \ b \ c )^T$  beschrieben werden.

$$\underbrace{( a \ b \ c )}_{\mathbf{l}^T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\mathbf{l}^T \cdot \mathbf{x} = 0$$

### Ergebnis

Inzidenz: Ein Punkt  $\mathbf{x}$  liegt auf einer Geraden  $\mathbf{l} \Leftrightarrow \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{x} = 0$





weiterhin gilt:

$k \cdot l \sim l$  ( $l$  und  $k \cdot l$  repräsentieren die selbe Linie.)

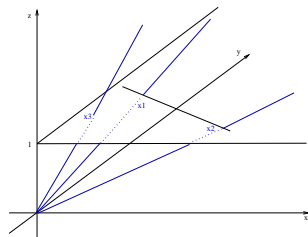
## Freiheitsgrade

2 dof: Verhältnisse zwischen  $a : b : c$ .

## Beispiel

Steigung und der Schnitt mit der y-Achse

## Ein Modell des $\mathcal{P}^2$



Vorstellung:

Der projektive zweidimensionale Raum  $\mathcal{P}^2$  ist in den  $\mathcal{R}^3$  eingebettet.

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{R}^3 - (0 \ 0 \ 0)^T$$

Ein Punkt im  $\mathcal{P}^2$  formt einen Strahl im  $\mathcal{R}^3$ :  $(x \ y \ z)^T \sim k \cdot (x \ y \ z)^T$

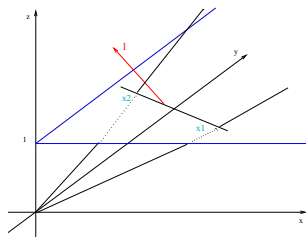
- Die  $k \cdot (x \ y \ z)^T$  formen eine Äquivalenzklasse. Der Schnittpunkt mit der Ebene  $z = 1$  kann als Repräsentant dieser Äquivalenzklasse gesehen werden.
- Geraden im  $\mathcal{P}^2$  entsprechen Strahlenbündel (Ebenen) im  $\mathcal{R}^3$ , die durch den Ursprung gehen.

## Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten

Für eine Linie  $l$ , die  $x_1$  und  $x_2$  enthält, gilt:

$$\left. \begin{array}{l} l^T \cdot x_1 = 0 \\ l^T \cdot x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow l \sim x_1 \times x_2$$

Dies wird durch  
das Kreuzprodukt zwischen  $x_1$  und  $x_2$  erfüllt.



**Abbildung:**  $l$  steht senkrecht auf der Ebene, die durch  $x_1$  und  $x_2$  aufgespannt wird.

### Ergebnis

Die Gerade  $l$  durch zwei Punkte  $x_1$  und  $x_2$  ist gegeben durch  $l \sim x_1 \times x_2$

## Schnittpunkt zweier Geraden $l_1$ und $l_2$

$$\left. \begin{array}{l} l_1^T \cdot x = 0 \\ l_2^T \cdot x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \sim l_1 \times l_2$$

$l_1 \times l_2$  erzeugt einen Vektor, der auf  $l_1$ , sowie auf  $l_2$  senkrecht steht.

Es gilt:

$$l_1^T \cdot \underbrace{(l_1 \times l_2)}_x = l_2^T \cdot \underbrace{(l_1 \times l_2)}_x = 0$$

### Ergebnis

Der Schnittpunkt  $x$  zweier Geraden  $l_1$  und  $l_2$  ist gegeben durch  $x \sim l_1 \times l_2$



# Gerade-Punkt Dualismus

- Schnittpunkt zweier Geraden  
 $x \sim l_1 \times l_2$
- Gerade definiert durch 2 Punkte  
 $l \sim x_1 \times x_2$

Berechnung des Schnittpunktes erfolgt analog zur Berechnung der Gerade, die durch zwei Punkte geht.

Punkte und Geraden können ihre Rollen tauschen.

⇒ Gerade-Punkt Dualismus

## Ergebnis (Gerade Punkt Dualismus)

Zu jedem Theorem im 2-dimensionalen projektiven Raum existiert ein **duales Theorem**, das durch geeignetes Vertauschen der Rollen von Punkt und Gerade erzielt wird. (Vorteil bei Beweisen)

## Ideale Punkte

- Im projektiven Raum „schneiden“ sich auch parallele Geraden.
- Punkte im Unendlichen

$$\mathbf{x}_\infty \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Betrachte 2 parallele Geraden  $l, l'$

$$l \sim \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ und } l' \sim \begin{pmatrix} a \\ b \\ c' \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittpunkt } \mathbf{x} \sim l \times l' = (c' - c) \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Alle  $\mathbf{x}_\infty \in \mathcal{P}^1$  liegen auf einer Gerade, der **unendlich fernen Gerade**.

## Veranschaulichung am Beispiel

Gegeben seien 2 parallele Geraden  $x = 1$  und  $x = 3$

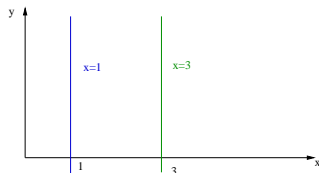


Abbildung: Parallelen schneiden sich im Unendlichen

Es gilt:

$$x \cdot 1 + y \cdot 0 - 1 = 0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{l}_1^T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$0 = \mathbf{l}_2^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{l}_2^T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Schnittpunkt:**  $\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  unendlich ferner Punkt

Die unendlich ferne Gerade (u.f.G) enthält alle Punkte im Unendlichen.

$$\mathbf{l}_\infty^T \cdot \mathbf{x}_\infty = 0$$

$$\text{d.h. } \forall x, y \quad \mathbf{l}_\infty^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{l}_\infty \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{unendlich ferne Gerade}$$

Parametrische Darstellung aller Punkte der Geraden durch  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ :

$$\mathbf{x} \sim \alpha \cdot \mathbf{x}_1 + \beta \cdot \mathbf{x}_2$$

$$(\text{bzw. } \sim \mathbf{x}_1 + \gamma \cdot \mathbf{x}_2)$$

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x}_1 = 0 \quad \mathbf{l}^T \mathbf{x}_2 = 0$$

$$\text{Es gilt: } \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \text{ auf } \mathbf{l}$$