Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,
Universität Freiburg

Gliederung

3 Algebraische Hilfsmittel
- Der Axiator
  - Eigenschaften des Axiators
- Kegelschnitte
  - Bestimmung des Kegelschnitts
  - Geometrische Betrachtungen
  - Dualer Kegelschnitt
  - Pol-Polare Beziehung
  - Berechnung der Schnittpunkte
- Schnittpunkte eines Kreises mit der u.f.G.(Zirkularpunkte)
- Klassifikation von Kegelschnitten

Gliederung

3 Algebraische Hilfsmittel
- Der Axiator
  - Eigenschaften des Axiators
- Kegelschnitte
  - Bestimmung des Kegelschnitts
  - Geometrische Betrachtungen
  - Dualer Kegelschnitt
  - Pol-Polare Beziehung
  - Berechnung der Schnittpunkte
- Schnittpunkte eines Kreises mit der u.f.G.(Zirkularpunkte)
- Klassifikation von Kegelschnitten

Algebraisches Hilfsmittel - Axiator

Das Kreuzprodukt lässt sich durch ein Matrix-Vektor-Produkt darstellen:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Matrix wird **Axiator** zum Vektor **a** gennant:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = [\mathbf{a}]_\times$$

Eigenschaften des Axiators

- Der Axiator ist **schiefsymmetrisch** $\Rightarrow [\mathbf{a}]_\times^T = -[\mathbf{a}]_\times$
- Rang$([\mathbf{a}]_\times) = 2$. Er bildet auf einen Unterraum ab, der senkrecht auf $\mathbf{a}$ steht.
- Der **Nullvektor** von $[\mathbf{a}]_\times$ ist $\mathbf{a}$ selbst.

$$[\mathbf{a}]_\times \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{a}^T \cdot [\mathbf{a}]_\times = \mathbf{0}^T$$

- Wiederholte Vektorprodukte

$$[\mathbf{a}]_\times^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T\mathbf{a}) \cdot I \qquad [\mathbf{a}]_\times^3 = -(\mathbf{a}^T\mathbf{a}) \cdot [\mathbf{a}]_\times$$

Wenn $|\mathbf{a}| = 1 \Rightarrow [\mathbf{a}]_\times^3 = -[\mathbf{a}]_\times$

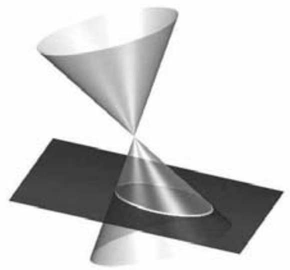
Gliederung

3 Algebraische Hilfsmittel
- Der Axiator
  - Eigenschaften des Axiators
- Kegelschnitte
  - Bestimmung des Kegelschnitts
  - Geometrische Betrachtungen
  - Dualer Kegelschnitt
  - Pol-Polare Beziehung
  - Berechnung der Schnittpunkte
- Schnittpunkte eines Kreises mit der u.f.G.(Zirkularpunkte)
- Klassifikation von Kegelschnitten

Kegelschnitte

Ein Kegelschnitt wird in der Ebene durch eine Gleichung vom Grad 2 beschrieben.

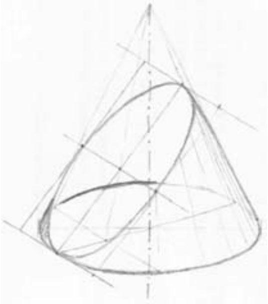
Abbildung: Kegelschnitt



Ellipsen - Beispiel

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c = 0$$

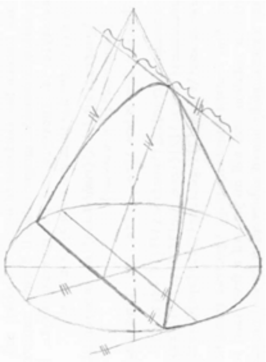
Abbildung: Ellipsen - Kegelschnitt



Parabel - Beispiel

$$a \cdot x^2 + b \cdot y + c = 0$$

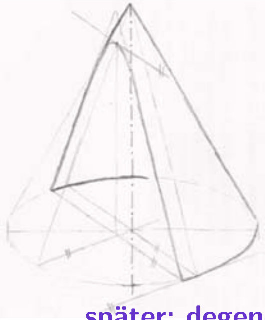
Abbildung: Parabel - Kegelschnitt



Hyperbel - Beispiel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - c = 0$$

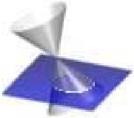
Abbildung: Hyperbel - Kegelschnitt



später: degenerierte Kegelschnitte

Kegelschnitt

Alle Punkte (x,y) auf dem Kegelschnitt erfüllen:



$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Matrixschreibweise bei homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0$$

- Die symmetrische Matrix **C** beschreibt den Kegelschnitt (Ellipse, Hyperbel, Kreis, ...).
- $Rang(\mathbf{C}) = 3$ oder niedriger (degenerierter Kegelschnitt)
- **C** ist **symmetrisch**. $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$.
  $\Rightarrow$ 6 unterschiedliche Einträge (aber 5 d.o.f.)
- **C** kann normiert werden, z.B. auf $f = 1$, falls $f \neq 0$.
  (aufgrund homogener Koordinatenrepräsentation)

Ergebnis (Freiheitsgrade)

Ein Kegelschnitt **C** hat 5 Freiheitsgrade.

Ersichtlich auch an den 5 Verhältnissen: a:b:c:d:e:f

Veranschaulichung der Freiheitsgrade

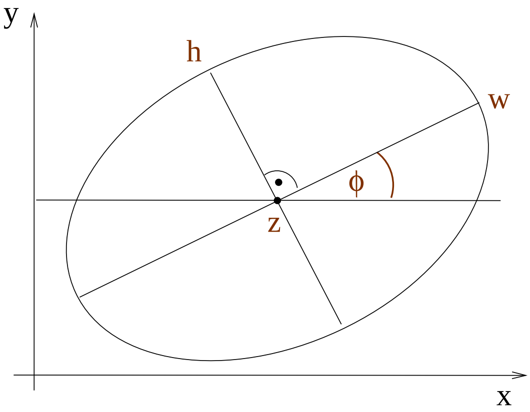


Abbildung: Freiheitsgrade einer Ellipse

Bestimmung des Kegelschnitts

- **5 beliebige Punkte** (davon keine 3 kollinearen) legen einen Kegelschnitt fest.
  Jeder Punkt $\mathbf{x_i} = \begin{pmatrix} x_i, & y_i \end{pmatrix}^T$ liefert eine Bedingung (Constraint).
- Die Gleichung $ax_i^2 + bx_iy_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + f = 0$ kann als

$$\begin{pmatrix} x_i^2 & x_i \cdot y_i & y_i^2 & x_i & y_i & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c} = 0$$

dargestellt werden, mit

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}^T$$

Bestimmung des Kegelschnitts (2)

Ein Kegelschnitt kann mittels fünf Punkte bestimmt werden.

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = 0$$

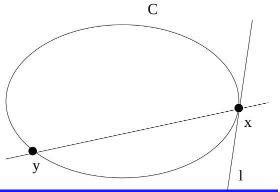
Dieser Lösungsweg mittels Bestimmung des Nullraums ist ein häufig verwendetes Verfahren. (u.a. DLT)

Geometrische Betrachtungen

$\mathbf{l} \sim \mathbf{Cx}$ ist eine Gerade. Diese berührt den Kegelschnitt $\mathbf{C}$ in genau einem Punkt, falls:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Cx} = 0$$

Wir werden sehen, dass $\mathbf{l}$ den Kegelschnitt $\mathbf{C}$ in diesem Fall nur in $\mathbf{x}$ und in keinem weiteren Punkt $\mathbf{y}$ schneiden kann.



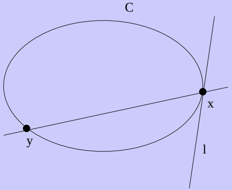
Ergebnis (Tangente)

$\mathbf{l} \sim \mathbf{Cx}$ beschreibt die Tangente in $\mathbf{x}$ am Kegelschnitt, falls $\mathbf{x}^T \mathbf{Cx} = 0$

Beweis. $\mathbf{l} \sim \mathbf{Cx}$ ist Tangente in $\mathbf{x}$ am Kegelschnitt.

Die Linie $\mathbf{l} \sim \mathbf{Cx}$ durchläuft $\mathbf{x}$, da $\mathbf{x}^T\mathbf{l} = \mathbf{x}^T\mathbf{Cx} = 0$

Annahme:
$\mathbf{l}$ schneide $\mathbf{C}$ in einem weiteren Punkt $\mathbf{y}$.
Wegen $\mathbf{l} \sim \mathbf{Cx}$ gilt $\mathbf{y}^T\mathbf{Cx} = 0$
und da $\mathbf{y}$ auch auf $\mathbf{C}$: $\mathbf{y}^T\mathbf{Cy} = 0$.



$$\Rightarrow \quad (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})^T\mathbf{C}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2(\mathbf{x}^T\mathbf{Cx}) + 2\alpha\beta(\mathbf{x}^T\mathbf{Cy}) + \beta^2(\mathbf{y}^T\mathbf{Cy}) = 0 \quad \forall \alpha, \beta$$

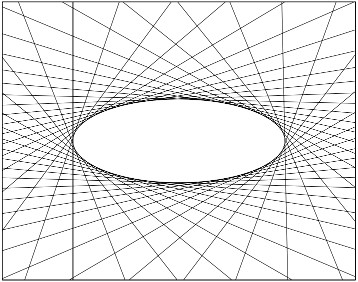
$\Rightarrow$ Kegelschnitt müsste gesamte Gerade enthalten. **Widerspruch!**
(bzw. degenerierter Kegelschnitt)

$\Rightarrow$ $\mathbf{Cx}$ ist Tangente an $\mathbf{C}$ in $\mathbf{x}$

$\square$

Dualer Kegelschnitt

Dualitätsprinzip: Ein Kegelschnitt kann über seine Tangenten $\mathbf{t}$ beschrieben werden.



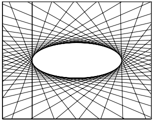
$$\begin{aligned} \mathbf{t} \sim \mathbf{C}\mathbf{x} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{x} \sim \mathbf{C}^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 0 \quad &\Rightarrow \quad (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{t})^T\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{t} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{t}^T\mathbf{C}^{-1}}_{\mathbf{C}^{-T}=\mathbf{C}^{-1}} \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}}_{I_{3\times 3}}\mathbf{t} = 0 \end{aligned}$$

Dualer Kegelschnitt (2)

Ergebnis (Dualer Kegelschnitt)

Der duale Kegelschnitt $\mathbf{C}^*$ mit $\mathbf{t}^T\mathbf{C}^*\mathbf{t} = 0$ beschreibt einen Kegelschnitt mittels Tangenten.

- Falls $\mathbf{C}$ nicht-singulär, so gilt: $\mathbf{C}^* \sim \mathbf{C}^{-1}$
- Zur Berechnung sind 5 Tangenten notwendig.



Pol-Polare Beziehung

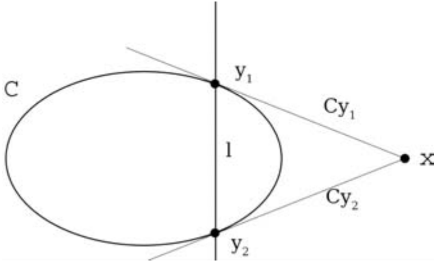


Abbildung: Pol-Polare Beziehung der Polaren $\mathbf{l} \sim \mathbf{C}\mathbf{x}$ zu $\mathbf{x}$ bzgl $\mathbf{C}$.

Polarität drückt eine Beziehung zwischen Punkten, Linien und Kegelschnitten aus.

- Der Punkt $\mathbf{x}$ und der Kegelschnitt $\mathbf{C}$ definieren eine Linie $\mathbf{l} \sim \mathbf{C}\mathbf{x}$.
- Die Linie $\mathbf{l}$ ist die Polare von $\mathbf{x}$ bezüglich $\mathbf{C}$.
- Der Punkt $\mathbf{x} \sim \mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}$ ist der Pol von $\mathbf{l}$ bzgl $\mathbf{C}$.

Ergebnis (Pol-Polare Beziehung)

Die polare Linie $\mathbf{l} \sim \mathbf{C}\mathbf{x}$ von $\mathbf{x}$ bzgl $\mathbf{C}$ schneidet $\mathbf{C}$ in den zwei Punkten $\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_2$. Dann schneiden sich die beiden Tangenten in $\mathbf{y}_1$ und in $\mathbf{y}_2$ an $\mathbf{C}$ im Pol $\mathbf{x}$.

Beweis.

Seien $\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_2$ Punkte auf $\mathbf{C}$. Die Tangenten $\mathbf{l}_{1/2}$ in $\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_2$ an $\mathbf{C}$ sind bekanntlich $\mathbf{C} \cdot \mathbf{y}_{1/2}$. $\mathbf{l}_1$ bzw. $\mathbf{l}_2$ enthalten $\mathbf{x}$, falls gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{y}_1 &= 0; & \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{y}_2 &= 0 \\
(\mathbf{C}\mathbf{x})^T\mathbf{y}_1 &= 0; & (\mathbf{C}\mathbf{x})^T\mathbf{y}_2 &= 0 \\
&\Rightarrow \mathbf{l} \sim \mathbf{C}\mathbf{x} \sim \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2
\end{aligned}
$$

$\mathbf{l}$ ist die Polare von $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \sim \mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}$ ist Pol von $\mathbf{l}$. $\square$

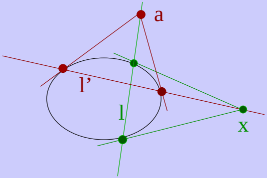
- Wir haben $\mathbf{l} \sim \mathbf{C}\mathbf{x}$ als Tangente an $\mathbf{C}$ kennengelernt, falls $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{C}$.
- Je mehr sich $\mathbf{x}$ dem Kegelschnitt nähert, desto mehr nähern sich die Berührpunkte der Tangenten.
  Bis die Tangenten schließlich zusammenfallen, falls $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{C}$ liegt.
- Jede Gerade schneidet einen nicht degenerierten Kegelschnitt ($\mathbf{C}$ regulär) in zwei Punkten (können evtl. auch komplexe Schnittpunkte sein) oder in einem doppelten Schnittpunkt (reell).

Konjugierte Punkte

Ergebnis (Konjugierte Punkte)

Die Polare jedes Punktes **a** von **l** geht durch den Punkt **x**, den Pol von **l**.

Beweis.



$$\text{Polare von } \mathbf{x}\text{: } \mathbf{l} \sim \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad \mathbf{a}^T\mathbf{l} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$$

$$\overset{\text{symm.}}{\Rightarrow} \underbrace{(\mathbf{C}\mathbf{a})^T}_{\text{Polare von } \mathbf{a}} \mathbf{x} = 0$$

a und **x** heißen konjugierte Punkte bzgl **C**.

Konjugierte Punkte (2)

- **Konjugierte Punkte** bzgl $\mathbf{C}$ sind alle Punkte $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ die $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{y} = 0$ erfüllen.
- Diese Beziehung ist symmetrisch:
  Falls $\mathbf{x}$ auf der Polaren von $\mathbf{y}$ liegt, dann liegt $\mathbf{y}$ auf der Polaren von $\mathbf{x}$

Schnittpunkte Kegelschnitt - Gerade (1.Möglichkeit)

Gesucht: Schnittpunkte zwischen einer Geraden $\mathbf{l}$ und einem Kegelschnitt $\mathbf{C}$.
($\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ liegen auf $\mathbf{l}$)

$$(\lambda \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)^T \mathbf{C} (\lambda \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = 0$$

(homogen, deshalb nur ein Skalar)

$$\lambda^2 (\mathbf{x}_1^T \mathbf{C} \mathbf{x}_1) + 2\lambda (\mathbf{x}_1^T \mathbf{C} \mathbf{x}_2) + (\mathbf{x}_2^T \mathbf{C} \mathbf{x}_2) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ (Joachimsthal Gleichung)

Schnittpunkte Kegelschnitt - Gerade (2.Möglichkeit)

Sei die Gerade $\mathbf{l}$ und der Kegelschnitt $\mathbf{C}$ gegeben.
Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{l}^T\mathbf{x} = 0\end{array}\right\} \text{da } \mathbf{x} \text{ auf } \mathbf{C} \text{ und } \mathbf{l}$$

$$\overset{\mathbf{x}\perp\mathbf{l}\text{und } \mathbf{x}\perp\mathbf{C}\mathbf{x}}{\Rightarrow} \mathbf{x} \sim \mathbf{l} \times (\mathbf{C}\mathbf{x})$$

Ergebnis (Schnittpunkte in Axiator-Schreibweise)

$\mathbf{x} \sim [\mathbf{l}]_\times \mathbf{C}\mathbf{x} \Rightarrow$ **Eigenwertproblem**

- Die Schnittpunkte sind die Eigenvektoren von $[\mathbf{l}]_\times \mathbf{C}$ zu den beiden von Null verschiedenen Eigenwerten von $[\mathbf{l}]_\times \mathbf{C}$.
- $[\mathbf{l}]_\times \mathbf{C}$ ist singulär
- $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}$ ist der Nullvektor von $[\mathbf{l}]_\times \mathbf{C}$.

$\Rightarrow$ Eigenvektor zum Eigenwert 0.

- ($\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}$ ist der Pol von $\mathbf{l}$)

Gliederung

3 Algebraische Hilfsmittel
- Der Axiator
  - Eigenschaften des Axiators
- Kegelschnitte
  - Bestimmung des Kegelschnitts
  - Geometrische Betrachtungen
  - Dualer Kegelschnitt
  - Pol-Polare Beziehung
  - Berechnung der Schnittpunkte
- Schnittpunkte eines Kreises mit der u.f.G.(Zirkularpunkte)
- Klassifikation von Kegelschnitten

Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden

Gleichung für einen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \end{pmatrix}^T$:

$$
\begin{aligned}
(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 &= r^2 \\
x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \\ -\alpha & -\beta & \alpha^2+\beta^2-r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \mathbf{C}_{\text{Kreis}} &= \begin{pmatrix} I_2 & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k}^T & \mathbf{k}^T\mathbf{k} - r^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden (2)

Für Punkte $\mathbf{x}$ auf dem Kreis gilt $\mathbf{x}^T \mathbf{C}_{\text{Kreis}} \mathbf{x} = 0$

$$\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} I_2 & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k}^T & \mathbf{k}^T\mathbf{k} - r^2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0$$

Die Schnittpunkte eines Kreises mit der Geraden $\mathbf{l}$ sind, die Eigenvektoren von $[\mathbf{l}]_\times \mathbf{C}_{\text{Kreis}}$ mit $\mathbf{C}_{\text{Kreis}} \sim \begin{pmatrix} I_2 & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k}^T & \mathbf{k}^T\mathbf{k} - r^2 \end{pmatrix}$.

Schnittpunkte eines Kreises mit der u.f.Gerade $\mathbf{l}_\infty$

Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden $\mathbf{l}_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$:
Eigenvektoren von $[\mathbf{l}_\infty]_\times \mathbf{C}_{\text{Kreis}}$.

$$[\mathbf{l}_\infty]_\times \mathbf{C}_{\text{Kreis}} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_2 & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k}^T & \mathbf{k}^T\mathbf{k} - r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren:

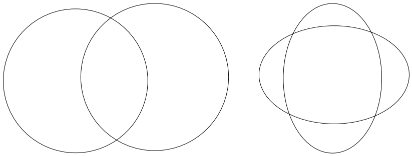
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm j \\ 0 \end{pmatrix} = \mp j \begin{pmatrix} 1 \\ \pm j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 & \pm j & 0 \end{pmatrix}^T$ nennt man **Zirkularpunkte**.
Sie liegen auf der u.f.G $\mathbf{l}_\infty$.

Ergebnis (Zirkularpunkte)

Die Zirkularpunkte $\begin{pmatrix} 1 & \pm j & 0 \end{pmatrix}^T$ sind unabhängig von den Parametern des Kreises α, β und r.
$\Rightarrow$ Alle Kreise schneiden die unendlich ferne Gerade in den selben Punkten - den Zirkularpunkten.

Zwei Kegelschnitte haben algebraisch 4 Schnittpunkte (evtl. komplex). Zwei Kreise können 2 reelle Schnittpunkte haben. Sie haben 2 weitere Schnittpunkte in den Zirkularpunkten.



(a) Kreis (b) Ellipsen

Abbildung: Schnitt von Kreisen bzw Ellipsen

Umgekehrt gilt:

$$\text{Ist } \begin{pmatrix} 1 & \pm j & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm j \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{C} \text{ ist ein Kreis}$$

Der dritte Eigenvektor ist $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}^T$ zum Eigenwert 0.
Er ist der Pol von $\mathbf{l}_\infty$ bzgl. des Kreises $\mathbf{C}_{\text{Kreis}}$ (Mittelpunkt).
Allgemeiner:

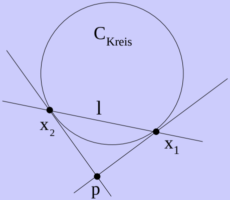
Theorem

Der Pol $\mathbf{p}$ *bzgl* $\mathbf{C}$ *und* $\mathbf{l}$ *ist der Nullraum von* $[\mathbf{l}]_\times \mathbf{C}$ *(EV zum EW 0).*

Beweis.

$$\mathbf{p} \text{ Pol von } \mathbf{l}: \quad \mathbf{p} \sim \mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}$$

$$[\mathbf{l}]_\times \mathbf{C}\mathbf{p} = [\mathbf{l}]_\times (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1})\mathbf{l} = \mathbf{l} \times \mathbf{l} = \mathbf{0}$$



□

Übung

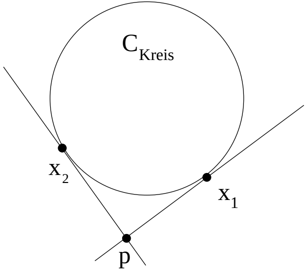


Abbildung: Tangenten an **C** durch **p**

Seien **C** sowie ein Punkt **p** gegeben. Man berechne die Berührpunkte $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ der Tangenten von **p** an **C**.

Lösung

$$\text{Geraden durch } \mathbf{p} \text{ und } \mathbf{x}_{1/2}: \quad \mathbf{l}_{1/2} \sim \mathbf{p} \times \mathbf{x}_{1/2}$$
$$\text{Tangenten an } \mathbf{C} \quad \mathbf{l}_{1/2} \sim \mathbf{C}\mathbf{x}_{1/2}$$

Die Tangente an $\mathbf{C}$ in $\mathbf{x}$ geht durch $\mathbf{p}$ und $\mathbf{x}$. Es gilt:

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_{1/2} \sim \mathbf{p} \times \mathbf{x}_{1/2} \sim [\mathbf{p}]_\times \mathbf{x}_{1/2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{p}]_\times \mathbf{x} \sim \mathbf{x}}$$

$\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind die zwei Eigenvektoren von $\mathbf{C}^{-1}[\mathbf{p}]_\times$ zu den beiden von Null verschiedenen Eigenwerten.

Gliederung

3. Algebraische Hilfsmittel
   - Der Axiator
     - Eigenschaften des Axiators
   - Kegelschnitte
     - Bestimmung des Kegelschnitts
     - Geometrische Betrachtungen
     - Dualer Kegelschnitt
     - Pol-Polare Beziehung
     - Berechnung der Schnittpunkte
   - Schnittpunkte eines Kreises mit der u.f.G.(Zirkularpunkte)
   - Klassifikation von Kegelschnitten

Klassifikation von Kegelschnitten

Für einen Kegelschnitt $\mathbf{C}$ und einen Punkt $\mathbf{x}$ auf diesem Kegelschnitt gilt

$$\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$$

$\mathbf{C}$ kann mittels Eigenwertzerlegung folgendermaßen zerlegt werden:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \mathbf{U} \text{ mit } \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$$

Also

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})^T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \mathbf{U}\mathbf{x} = 0$$

Dabei sind α, β und γ die Eigenwerte von $\mathbf{C}$. Diese Zerlegung ist möglich, da $\mathbf{C}$ symmetrisch ist.

Die Klassifikation der Kegelschnitte erfolgt anhand der Vorzeichen der Eigenwerte.
Dazu faktorisieren wir die Vorzeichen $\delta, \epsilon, \zeta \in \{-1, 0, 1\}$ aus:

$$\left[\begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha|} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\beta|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\gamma|} \end{pmatrix} \mathbf{Ux} \right]^T \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha|} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\beta|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\gamma|} \end{pmatrix} \mathbf{Ux}$$

Mit der Abkürzung

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha|} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\beta|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\gamma|} \end{pmatrix} \mathbf{Ux} \right]$$

folgt für die Gleichung des Kegelschnitts

$$\mathbf{y}^T \underbrace{\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}}_{\text{Signatur}} \mathbf{y} = \delta y_1^2 + \epsilon y_2^2 + \zeta y_3^2 = 0$$

Die verschiedenen Klassifikationen für den Kegelschnitt ergeben sich nun aus den verschiedenen Möglichkeiten für die Vorzeichen

$$\delta y_1^2 + \epsilon y_2^2 + \zeta y_3^2 = 0$$

- $\delta = \epsilon = \zeta = +1$: **C** ist positiv definit.
  Keine reellen Punkte (nur komplexe Punkte).
- $\delta = \epsilon = +1$ und $\zeta = -1$: Es gibt reelle Punkte.
  Geometrische Figur: Kreis, Ellipse, Hyperbel oder Parabel.
- $\delta = \epsilon = +1$ und $\zeta = 0$: Es gibt nur einen reellen Punkt $\mathbf{y} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ und ansonsten nur komplexe Punkte.
- $\delta = 1$, $\epsilon = -1$, $\zeta = 0$: $\quad y_1^2 - y_2^2 = 0 \rightarrow y_2 = \pm y_1$,
  $\mathbf{y} \sim \begin{pmatrix} \alpha & \pm\alpha & \beta \end{pmatrix}^T$ (Zwei Winkelhalbierende / degenerierter Kegelschnitt)
- $\delta = 1$, $\epsilon = \zeta = 0$: $\quad y_1^2 = 0 \rightarrow y_1 = 0$, $\mathbf{y} \sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}^T$
  (doppelte Gerade, y-Achse)