Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,
Universität Freiburg

Gliederung

Projektive Transformationen in der projektiven Ebene

Synonyme: Homographien, Projektivitäten, Kollineationen

Definition (Projektivität)

Eine Projektivität ist eine umkehrbare Abbildung h von $\mathcal{P}^2$ auf $\mathcal{P}^2$ so, dass drei Punkte $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ dann und nur dann auf der gleichen Gerade liegen, wenn das auch für $h(\mathbf{x}_1)$, $h(\mathbf{x}_2)$ und $h(\mathbf{x}_3)$ gilt. (Kollineationen)

Theorem

Eine Abbildung $h : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2$ ist genau dann eine Projektivität, wenn es eine nicht singuläre 3×3 Matrix $\mathbf{H}$ gibt, derart, dass gilt $h(\mathbf{x}) \sim \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$.

$\mathbf{H}$ ist eine lineare Transformation zwischen Punkten mit homogenen Koordinaten.
Die Klasse der projektiven Transformationen bildet eine Gruppe.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'} \sim \mathbf{H} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1{}^T \\ \mathbf{h}_2{}^T \\ \mathbf{h}_3{}^T \end{pmatrix}$$

mit

$$x' = \frac{\mathbf{h}_1{}^T \mathbf{x}}{\mathbf{h}_3{}^T \mathbf{x}}, \quad y' = \frac{\mathbf{h}_2{}^T \mathbf{x}}{\mathbf{h}_3{}^T \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \sim \mathbf{H}^{-1} \mathbf{x}'$$

Beweis: $\mathbf{H}$ Projektivität $\Leftrightarrow h(\mathbf{x}) \sim \mathbf{H}\mathbf{x}$, $\mathbf{H}$ hat vollen Rang.

Hier soll nur eine Richtung des Beweises skizziert werden.
Zu zeigen ist:

$$\left.\begin{array}{l}\exists \mathbf{l} : \mathbf{l}^T\mathbf{x_1} = \mathbf{l}^T\mathbf{x_2} = \mathbf{l}^T\mathbf{x_3} = 0 \Leftrightarrow \\ \exists \mathbf{l}' : \mathbf{l}'^T h(\mathbf{x_1}) = \mathbf{l}'^T h(\mathbf{x_2}) = \mathbf{l}'^T h(\mathbf{x_3}) = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow h(\mathbf{x}) \sim \mathbf{H}\cdot\mathbf{x}$$

“ $\Leftarrow$” :

$$\mathbf{l}^T\mathbf{x_1} = \mathbf{l}^T\mathbf{x_2} = \mathbf{l}^T\mathbf{x_3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\mathbf{l}^T\mathbf{H}^{-1}}_{\mathbf{l}'^T}\underbrace{\mathbf{H}\mathbf{x}_1}_{\mathbf{x}'_1} = \underbrace{\mathbf{l}^T\mathbf{H}^{-1}}_{\mathbf{l}'^T}\underbrace{\mathbf{H}\mathbf{x}_2}_{\mathbf{x}'_2} = \underbrace{\mathbf{l}^T\mathbf{H}^{-1}}_{\mathbf{l}'^T}\underbrace{\mathbf{H}\mathbf{x_3}}_{\mathbf{x}'_3} = 0$$

Mit $\mathbf{l}'^T \sim \mathbf{l}^T\mathbf{H}^{-1}$ ist dies die Behauptung.

$\square$

Korrelation

- Ein Kegelschnitt induziert eine projektive Abbildung zwischen Punkten und Linien im $\mathcal{P}^2$.
- Eine solche Abbildung wird auch Korrelation genannt.

Definition (Reguläre Korrelation)

Eine reguläre Korrelation ist eine invertierbare Abbildung zwischen Punkten und Linien im $\mathcal{P}^2$. Sie wird durch eine nicht singuläre Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{l} = \mathbf{Ax}$ repräsentiert.

Gliederung

Transformation von Geraden

Anhand dieser Gleichung wird ersichtlich, wie Linien und Punkte von einer projektiven Transformation transformiert werden.

Ergebnis

Besteht eine projektive Transformation $\mathbf{H}$ zwischen Punkten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$, so werden korrespondierende Linien $\mathbf{l}$ und $\mathbf{l}'$ über $\mathbf{H}^{-T}$ transformiert. Es gilt:

$$\mathbf{x}' \sim \mathbf{H}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{l}' \sim \mathbf{H}^{-T}\mathbf{l}$$

Transformation des Axiators

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Werden $\mathbf{l}$ sowie $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ durch $\mathbf{H}$ transformiert, so gilt:

$$\mathbf{H}^{-T}\mathbf{l} \sim (\mathbf{Ha}) \times (\mathbf{Hb})$$

Mit $\mathbf{l} = [\mathbf{a}]_\times \mathbf{b}$ folgt dann:

$$\mathbf{H}^{-T}[\mathbf{a}]_\times \mathbf{b} \sim [\mathbf{Ha}]_\times \mathbf{Hb}$$
$$\mathbf{H}^{-T}[\mathbf{a}]_\times \sim [\mathbf{Ha}]_\times \mathbf{H}$$

Insgesamt

$[\mathbf{Ha}]_\times \sim \mathbf{H}^{-T}[\mathbf{a}]_\times \mathbf{H}^{-1}$ (Gleichheit bis auf einen Skalenfaktor)
Genauer: $[\mathbf{Ha}]_\times = \det(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^{-T}[\mathbf{a}]_\times \mathbf{H}^{-1}$

Transformation von Kegelschnitten

- $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$ für alle Punkte auf dem Kegelschnitt.
- Projektive Transformationen erhalten Koinzidenzen.
- Werden die Punkte $\mathbf{x}$ mittels $\mathbf{H}$ transformiert, folgt:

$$\mathbf{x}' \sim \mathbf{H}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{H}^{-1}\mathbf{x}'$$

$$\mathbf{x}'^T\mathbf{H}^{-T}\mathbf{C}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{x}' = 0$$

Ergebnis

Unter einer Punkttransformation $\mathbf{x}' \sim \mathbf{H}\mathbf{x}$ gilt für den transformierten Kegelschnitt $\mathbf{C}'$:

$$\mathbf{C}' \sim \mathbf{H}^{-T}\mathbf{C}\mathbf{H}^{-1}$$

Gliederung

Standard Projektive Basis

Definition

Die “Standard Projektive Basis” ist das System

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Viereck, von dem 2 Punkte im Unendlichen liegen.)

Eine projektiven Transformation **H** kann mittels der Bilder **a**, **b**, **c** und **d** der standard projektiven Basis beschrieben werden.

$$\mathbf{H}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \sim \mathbf{a} \wedge \mathbf{H}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \sim \mathbf{b} \wedge \mathbf{H}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \sim \mathbf{c} \wedge \mathbf{H}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \sim \mathbf{d}$$

Aus dem Bild der Basisvektoren **a**, **b**, **c** folgt für **H**:

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda})$$

Welche Werte nimmt die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda})$ an?

$$\mathbf{H}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}) \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \sim \mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{d}$$

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{d}\right)$$

Ergebnis

Alle Vierecke sind äquivalent unter projektiven Transformationen.

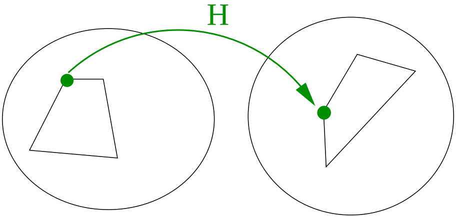


Abbildung: Vierecke sind äquivalent unter projektiven Transformationen

Gliederung

Klassifikation der projektiven Transformationen

- Die Klassifikation einer projektiven Transformation erfolgt anhand der Fixpunkte der Transformation.
- Dabei ist der Ansatz die Gleichung $\mathbf{Hv} \sim \mathbf{v}$, also die Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden.

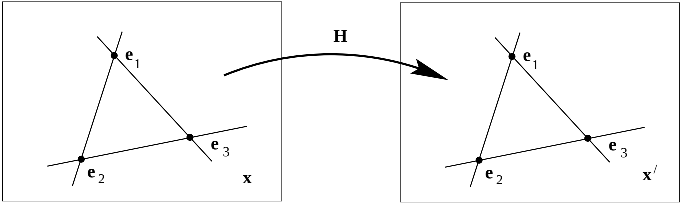


Abbildung: Fixe Punkte und Linien einer projektiven Transformation in der Ebene

- Algebraisch handelt es sich bei den Fixpunkten um die Eigenvektoren der Punkttransformation $\mathbf{Hv} \sim \mathbf{v}$.
- $\mathbf{H}$ ist eine 3×3 Matrix.

$\Rightarrow$ Es gibt höchstens 3 verschiedene Eigenwerte mit drei linear unabhängigen Eigenvektoren.
(2 linear abhängige Vektoren sind in der projektiven Geometrie derselbe Punkt).

- Fixe Linien sind die Eigenvektoren der Linientransformation $\mathbf{H}^{-T}$ ($\mathbf{H}^{-T}\mathbf{l} \sim \mathbf{l}$ oder auch $\mathbf{H}^{T}\mathbf{l} \sim \mathbf{l}$).
- Hinweis: Feste Linien sind nicht unbedingt punktweise fix. Im allgemeinen werden die Punkte einer festen Linie auf andere Punkte der festen Linie abgebildet. Lediglich die Fixpunkte werden auf sich selbst abgebildet.

Jordansche Normalform

Gibt es drei verschiedene Eigenwerte, dann gibt es auch drei linear unabhängige Eigenvektoren und es gilt:

$$\mathbf{H}\underbrace{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})}_{\mathbf{V}} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{V} = \mathbf{A}$ nennt man die Jordansche Normalform
- $\mathbf{V}$ ist die Matrix der Eigenvektoren im obigen Fall.

Mögliche Ausprägungen der Jordanschen Normalform

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix} \sim I_{3\times 3}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}$$

Drei unterschiedliche Eigenwerte (-Vektoren)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

Mit den beiden Eigenvektoren (Fixpunkten) $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ und dem Punkt $\mathbf{x}$ auf der Verbindungsgeraden gilt:

$$\mathbf{Hv_1} = \alpha\mathbf{v_1} \quad \mathbf{Hv_2} = \beta\mathbf{v_2}$$

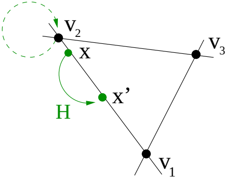
$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{v_1} + \mu\mathbf{v_2}$$

$$\mathbf{Hx} = \lambda\alpha\mathbf{v_1} + \mu\beta\mathbf{v_2}$$

Folglich liegt $\mathbf{Hx}$ auch auf der Verbindungsgeraden.

Drei unterschiedliche Eigenwerte (-Vektoren) (2)

Abbildung: 3 Fixpunkte: Die Geraden bleiben erhalten (nicht punktweise)



- 3 unterschiedliche Eigenwerte führen zu 3 Fixpunkten (EV).
- Geraden bleiben erhalten. Jedoch **nicht unbedingt punktweise**.
- **H** besitzt 8 Freiheitsgade

Planare Homologie (doppelter Eigenwert)

Im Falle eines doppelten Eigenwertes und mit **H** diagonalisierbar hat die Jordansche Normalform die Form:

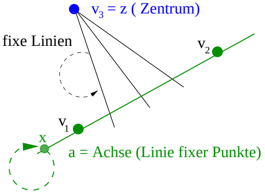
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$$

Wir betrachten den Eigenraum zum doppelten Eigenwert:

$$\mathbf{H}\mathbf{v_1} = \alpha\mathbf{v_1} \quad \mathbf{H}\mathbf{v_2} = \alpha\mathbf{v_2}$$
$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{H}(\lambda\mathbf{v_1} + \mu\mathbf{v_2}) = \lambda\mathbf{H}\mathbf{v_1} + \mu\mathbf{H}\mathbf{v_2} =$$
$$\lambda\alpha\mathbf{v_1} + \mu\alpha\mathbf{v_2} = \alpha(\lambda\mathbf{v_1} + \mu\mathbf{v_2}) = \alpha\mathbf{x}$$

Es gilt somit für Punkte auf der Geraden zwischen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$:
$\mathbf{H}\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$. (All diese Punkte sind Fixpunkte.)

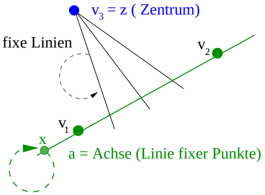
Planare Homologie (doppelter Eigenwert) (2)



- Der Eigenraum bzgl. der gleichen Eigenwerte ist zweidimensional.
- $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ spannen einen Eigenraum auf.

$\Rightarrow$ Punkte auf der Geraden durch $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ werden auf sich selbst abgebildet (Linie fixer Punkte).

- Diese Gerade heißt **Achse**.



- Die Abbildung **H** heißt **planare Homologie** und hat 5 Freiheitsgrade.
- Zur Berechnung reichen 3 korrespondierende Punkte aus.
- Der dritte EV bildet das Zentrum.
- Geraden durch das Zentrum sind fixe Linien. Punkte auf diesen Linien werden durch **H** auf Punkte der selben Linie abgebildet.

H lässt sich mittels dem Zentrum, der Achse und dem charakteristischen Verhältnis λ parametrisieren:

$$\boxed{\mathbf{H} \sim I + (\lambda - 1)\frac{\mathbf{z}\cdot\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{z}} \qquad \lambda = \frac{\beta}{\alpha}}$$

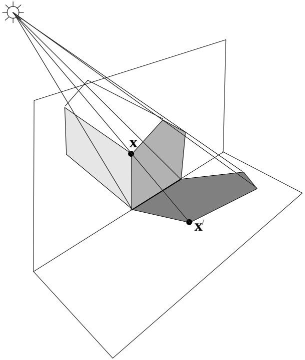
Das Zentrum, sowie alle Punkte **p** auf der Achse, werden auf sich selbst abgebildet:

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{z} \sim \mathbf{z} + (\lambda - 1)\frac{\mathbf{z}(\mathbf{a}^T\mathbf{z})}{(\mathbf{a}^T\mathbf{z})} = \lambda\mathbf{z}$$

und mit **p** auf der Achse **a**:

$$\mathbf{a}^T\mathbf{p} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{H}\cdot\mathbf{p} \sim I\cdot\mathbf{p} = \mathbf{p}$$

Beispiel



Das Bild zweier Ebenen, welche Objekte unter Perspektivabbildung enthalten.
Ein planares
Objekt (das Ende des Gebäudes) wirft seinen Schatten auf die Grundebene.
a ist das Bild der Schnittachse.
z ist
das Bild der Lichtquelle, das Zentrum.

Sowohl Zentrum als auch Achsenpunkte werden auf sich selbst abgebildet.

Spezialfälle

- Mit $\lambda = -1$ lautet $\mathbf{H}$: $\mathbf{H} \sim I - 2\frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{z}}$.
- Dies wird harmonische planare Homologie genannt.
- Diese hat 4 Freiheitsgrade, da einer (λ) schon bekannt ist.
- Es gilt: $\mathbf{H}^2 \sim I$ "Involution" (selbstinverse Abbildung).
- Beispiel: Das Bild eines ebenen Objektes mit Symmetrieachse. Dabei ist die Achse $\mathbf{a}$ das Bild der Symmetrieachse und das Zentrum $\mathbf{z}$ der Fluchtpunkt der Richtung senkrecht zur Symmetrieachse.

Elation

Bei der Elation nimmt die Diagonalmatrix folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$$

- Algebraisch hat die Matrix drei gleiche Eigenwerte.
- Der Eigenraum ist zweidimensional.
- Das Zentrum liegt auf der Achse.
- Punkte auf der Achse werden auf sich selber abgebildet.

Elation

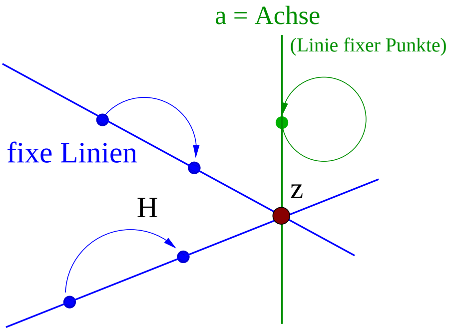
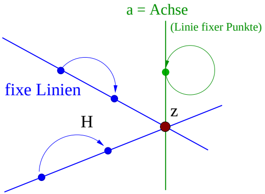


Abbildung: Elation: Das Zentrum liegt auf der Achse

Elation

Eine mögliche Parametrisierung:

$$\mathbf{H} \sim I + \lambda \mathbf{z}\mathbf{a}^T \text{ mit } \mathbf{a}^T\mathbf{z} = 0$$



Linien, die durch das Zentrum gehen, werden auf sich selbst abgebildet, aber nicht punktweise.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{p} &\sim \mathbf{p} && \text{falls } \mathbf{a}^T\mathbf{p} = 0 \\ \mathbf{l}^T\mathbf{H} &\sim \mathbf{l}^T && \text{falls } \mathbf{l}^T\mathbf{z} = 0 \end{aligned}$$

Beispiel (Elation)

Das Bild von sich wiederholenden Strukturen auf einer Ebene, wie die Fensterreihe auf einer Fassade. Die Fenster wiederholen sich nach jeder Translation **t**.

Achse a ist die Fluchtline, die alle Fluchpunkte enthält.

Zentrum z ist der Fluchtpunkt der Richtung, in der die Strukturen wiederholt werden.

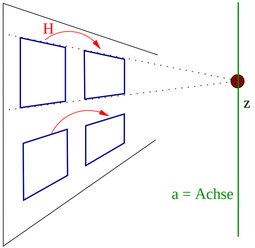


Abbildung: Elation, Beispiel: Eine Abbildung von Fenster auf Fenster

Perspektivitäten

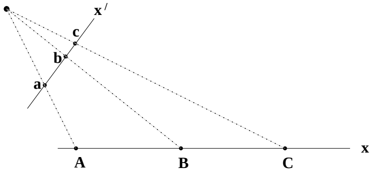
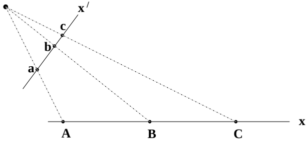


Abbildung: Perspektivität

- Korrespondierende Punkte definieren konkurrente Geraden. Diese laufen im Projektionszentrum zusammen.
- Perspektivitäten sind Projektivitäten, aber i.a. nicht umgekehrt.
- Die Komposition von 2 oder mehr Perspektivitäten ist eine Projektivität, aber i.a. keine Perspektivität.
- Der entscheidende Unterschied liegt darin, dass es für Perspektivitäten nur ein Projektionszentrum geben darf.



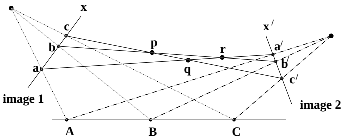


Abbildung: Perspektivität und Kombination zweier Perspektivitäten

- Es gibt kein eindeutiges Projektionszentrum zwischen allen korrespondierenden Punkten.
- Die Linien zwischen korrespondierenden Punkten $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ und $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ treffen sich in einem Projektionszentrum.
- Analog gilt dies für $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$ und $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$.
- Die Kombination der beiden Perspektivitäten führt zu korrespondierenden Punkten $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ und $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$.
  Die Verbindungslinien zwischen diesen schneiden sich jedoch nicht in einem Projektionszentrum.

$\Rightarrow$ Es handelt sich um eine Projektivität
- keine Perspektivität.