Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,
Universität Freiburg,

Gliederung

Invarianten

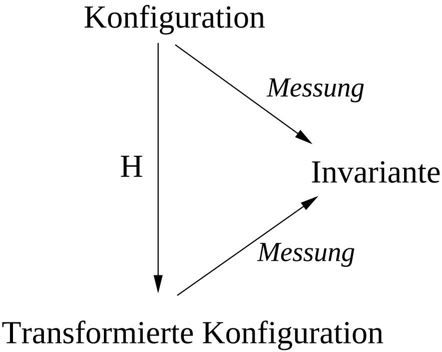

Abbildung: Die Invarianten sind die Größen, deren Messergebnis vor und nach der Transformation unverändert bleibt.

Invarianten

- Längen werden über die Norm $||\mathbf{x}||$ gemessen. (Achtung: Hier inhomogene Koordinaten!)

  Eine Abbildung ist längentreu, falls $||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}'||$ (Inhomogene Koordinaten)
- Winkel werden mit dem Skalarprodukt gemessen

  Eine Abbildung ist winkeltreu, falls $\frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{||\mathbf{x}||\cdot||\mathbf{y}||} = \frac{<\mathbf{x}',\mathbf{y}'>}{||\mathbf{x}'||\cdot||\mathbf{y}'||}$ (inhomogene Koordinaten).
- Längen- und Flächenverhältnisse
- Doppelverhältnis - Verhältnis von Verhältnissen.
- Parallelen - Wird die unendlich ferne Gerade auf sich selbst abgebildet?

Isometrien (Kongruenzen)

- Isometrien sind Transformationen des $\mathcal{R}^2$, die die Euklidische Distanz erhalten (iso = gleich).
- Kongruenzen setzen sich aus einer Drehung (oder Drehspiegelung) und einer Translation um den Vektor $\mathbf{t}$ zusammen.

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I, \text{ also } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\epsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \epsilon\cos\theta \end{pmatrix} \text{ mit } \epsilon \in \{-1, 1\}$$

Isometrien (Kongruenzen)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\epsilon\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \epsilon\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Matrix **R** ist eine orthogonale Matrix mit $\det(\mathbf{R}) = \epsilon$.

  $\epsilon = 1$: reine Drehung, orientierungserhaltend

  $\epsilon = -1$: Drehspiegelung, orientierungsumkehrend (z.B. Komposition einer reinen Drehung mit diag(-1,1,1)= Drehung + Spiegelung)

- Komposition zweier Kongruenzen

$$\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & t_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_2 & t_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 & (\mathbf{R}_1 t_2 + t_1) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Isometrien (Kongruenzen)

- Sei ϵ bekannt:
  Die Kongruenz hat **3 Freiheitsgrade** (θ, t_x, t_y)
  und kann aus 2 Punktkorrespondenzen berechnet werden.
- Invarianten wären z.Bsp.: Längen, Winkel, Flächen.
- Gilt $\mathbf{t} = 0$, handelt es sich um eine reine Dreh(-Spiegel)ung,
- Gilt $\mathbf{R} = I$, um eine reine Translation.

Berechnung der Fixpunkte

Bei $\epsilon = 1$ sind zwei der Fixpunkte (Eigenvektoren) von **H** die Zirkularpunkte $\begin{pmatrix} 1 & \mp j & 0 \end{pmatrix}^T$ mit den Eigenwerten $e^{\pm j\theta}$.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp j \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\pm j\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den dritten Fixpunkt nennt man den Pol.

Ergebnis

Jede starre Bewegung in der Ebene lässt sich als **reine Drehung um den Pol v** beschreiben. Aus dieser Definition lässt sich dann auch der Pol berechnen.

Beweis.

Für eine reine Drehung um den Punkt $\mathbf{v}$ muss $\mathbf{v}$ Fixpunkt der starren Bewegung sein.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{v} + \mathbf{t} = \mathbf{v} \Leftrightarrow (I - \mathbf{R})\mathbf{v} = \mathbf{t}$$

$$\mathbf{v} = \underbrace{(I - \mathbf{R})^{-1}}_{\mathbf{K}} \mathbf{t}$$

(Achtung: Gültigkeit nur in der Ebene. Ist $\mathbf{R}$ eine 3D-Rotation, dann existiert $\mathbf{K}$ nicht, denn dort ist die 1 Eigenwert von $\mathbf{R}$ mit der Drehachse als zugehörigen Eigenvektor.)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t} = \mathbf{R}[(\mathbf{x} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}] + \mathbf{t} = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{v}) + \underbrace{(\mathbf{R}\mathbf{v} + \mathbf{t})}_{\mathbf{v}\text{: Pol}}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{x}' - \mathbf{v}) = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{v})$$

Dies ist eine Drehung um den Pol $\mathbf{v}$. Verschiebe den Ursprung auf den Pol $\rightarrow$ Drehung $\rightarrow$ Rückverschiebung

$\square$

Spezialfälle - Reine Translation $\mathbf{R} = I_2$

Die Abbildung mit $\mathbf{R} = I_2$ (reine Translation) ist eine **Elation**.

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}^T}$$

Welches sind die Fixpunkte von $\mathbf{H}$?

- Alle Punkte $\begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix}^T$ werden auf sich selbst abgebildet.

$\Rightarrow$ Die unendlich ferne Gerade ist punktweise fix.

- Das Zentrum $\mathbf{z} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt auf der Achse.
- Es handelt sich also um eine Elation mit der Achse $\mathbf{a} \sim \mathbf{l}_\infty$ und dem Zentrum $\mathbf{z} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Geraden durch $\mathbf{z}$ sind alle Parallelen in Richtung $\mathbf{t}$:
Punkte auf diesen Geraden werden durch die Translation auf Punkte der selben Gerade abgebildet.
- Jordansche Normalform: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Drehspiegelung:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\epsilon\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \epsilon\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} \text{ mit } \epsilon = -1$$

- Eigenwerte 1,1 -1,
- JNF: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$
- EV zum Eigenwert 1: $\begin{pmatrix} cos\frac{\theta}{2} & sin\frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix}^T$
- EV zum Eigenwert -1: $\begin{pmatrix} sin\frac{\theta}{2} & -cos\frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix}^T$

- Wieso? Dies lässt sich mittels trigonometrischer Formeln einfach überprüfen:
  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- Es gibt keine Achse (Linie fixer Punkte). Die Zirkularpunkte werden aufeinander abgebildet.

$$\mathbf{H}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} = e^{j\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die unendlich ferne Gerade ist fixe Gerade, aber keine Achse.

- Sonderfall $\mathbf{t} = 0$
  Bei einer Drehspiegelung mit $\mathbf{t} = 0$ ist der Ursprung $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ zweiter Fixpunkt (EV) zum EW $\lambda = 1$ (planare Homologie).

Ähnlichkeitsabbildungen

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & s \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} s'\mathbf{R} & \mathbf{t}' \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s' = \frac{1}{s}$$

- Die Ähnlichkeitsabbildung hat 4 Freiheitsgrade,

⇒ Berechnung mittels 2 Punktkorrespondenzen.

- Isotrop: in alle Richtungen gleiche Skalierung.
- Invarianten:
  Längenverhältnisse, Winkel, Flächenverhältnisse

Ähnlichkeitsabbildungen

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & s \end{pmatrix}$$

Ergebnis

Eine Ähnlichkeitstransformation (ohne Spiegelung) kann durch eine Rotation und eine isotrope Skalierung um den Pol dargestellt werden.

Ähnlich zu den Kongruenzen lässt sich die starre Bewegung (Translation und Rotation) mit isotroper Skalierung als reine Drehung und Skalierung um den Pol darstellen.

Theorem

Bei einer Ähnlichkeitsabbildung und nur bei einer Ähnlichkeitsabbildung sind die Zirkularpunkte Fixpunkte.

Eine Richtung lässt sich einfach überprüfen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nachweis:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-j\phi} \\ j \cdot e^{-j\phi} \end{pmatrix} = e^{-j\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

Fixpunkte

- Die Zirkularpunkte $\begin{pmatrix} 1 & \pm j & 0 \end{pmatrix}^T$ sind die Eigenvektoren von

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} s'\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

  zu den Eigenwerten $\{s' \cdot e^{\mp j\theta}\}$. (fix unter Ähnlichkeitstransformation)
- Wie bei den Kongruenzen enthalten die Eigenwerte Information über den Drehwinkel.
- Der dritte Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist der Pol.

Affine Transformationen

Die affine Transformation besteht aus einer nicht singulären linearen Abbildung $\mathbf{A}$ mit anschließender Translation.

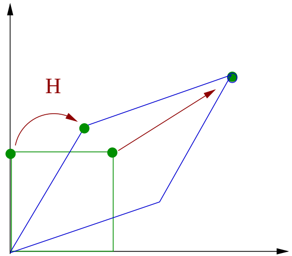

Abbildung: Affine Transformationen

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Dekomposition in Rotation und Deformation

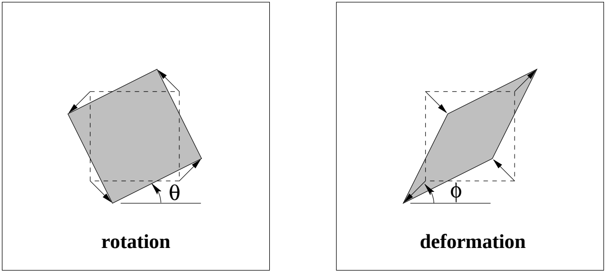

Abbildung: Dekomposition der planaren affinen Transformation in eine Rotation und Deformation (anisotrope Skalierung in orthogonale Skalierungsrichtungen)

Dekomposition in Rotation und Deformation

- Neben der Rotation und Translation erlauben affine Transformationen **anisotrope Skalierungen**.
- Deutung: Streckung entlang einer Skalierungsrichtung und einem Streckungsverhältnis $\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$.

  Zerlegung: $\mathbf{A} = \mathbf{R}(\theta) \cdot (\mathbf{R}(-\phi)\mathbf{D}\mathbf{R}(\phi))$.

  $\mathbf{R}(\phi)$ rotiert die Konfiguration in die Skalierungsrichtung.
  $\mathbf{D} = \mathbf{diag}\begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}$ skaliert die Konfiguration.
  $\mathbf{R}(-\phi)$ rotiert die Konfiguration zurück.
- Anschließend Rotation um θ mit $\mathbf{R}(\theta)$.

Affine Transformationen - Freiheitsgrade

- **H** hat 6 Freiheitsgrade.
- Zur Ähnlichkeitstransformation kommen
  - Streckungsverhältnis $\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$
  - und Streckungsrichtung ϕ hinzu.
- Sie wird durch 3 Punktkorrespondenzen eindeutig festgelegt.

Unendlich ferne Gerade unter affiner Transformation

Für Punkte im Unendlichen $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Aa} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis

Die unendlich ferne Gerade $\mathbf{l}_\infty$ wird unter affiner Transformation auf sich selbst abgebildet (fixe Linie).

Unendlich ferne Gerade unter affiner Transformation

- Im allgemeinen gilt dies jedoch nicht punktweise.

  Bis auf zwei Punkte - Eigenvektoren von $\mathbf{H}$.
- Bedeutung:
  - Parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen.
  - Die unendlich ferne Gerade ist fix unter affinen Transformationen.

  ⇒ Parallelen bleiben erhalten (invariant).
  Sie „schneiden“ sich auch nach der Transformation im Unendlichen.

Invarianten der affinen Transformation

- Parallelen bleiben erhalten.
- Längenverhältnisse auf Geraden gleicher Richtung bleiben erhalten.
- Flächenverhältnisse sind invariant.
  Alle Flächen verändern sich entsprechend $\lambda_x \cdot \lambda_y = det(\mathbf{A})$.

  Die Invarianten der Obergruppe sind Invarianten der Untergruppen (Kongruenzen, Ähnlichkeitstransformationen)

Projektive Transformationen

Erweitert man die Matrix der affinen Abbildung zu:

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^T & s \end{pmatrix}$$

erhält man eine **projektive Transformation**. Hier werden Punkte im Unendlichen i.A. auf Punkte im Endlichen abgebildet.

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Aa} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

Projektive Transformationen

- **H** besitzt 9 Einträge.

$\Rightarrow$ 8 Freiheitsgrade (8 Verhältnisse)

$\Rightarrow$ Um **H** eindeutig zu bestimmen werden 4 Punktkorrespondenzen benötigt, von denen keine 3 kollinear sein dürfen.

Invarianten der projektiven Transformation - Doppelverhältnis

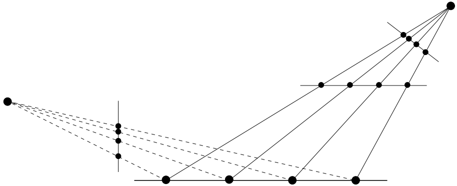

Abbildung: Vier Mengen kollinearer Punkte, die über eine projektive Transformation miteinander in Verbindung stehen. Das Doppelverhältnis ist für diese Mengen invariant

Invarianten der projektiven Transformation - Doppelverhältnis

Definition

Das Doppeltverhältnis von vier Punkten auf $\mathcal{P}^1$ ist definiert als:

$$\text{Cross}\left(\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2; \quad \mathbf{x}_3, \quad \mathbf{x}_4 \right) = \frac{|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3| \cdot |\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4|}{|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4| \cdot |\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3|} = \frac{|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3| / |\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3|}{|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4| / |\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4|}$$

$$\mathrm{mit}\ |\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j| = \det \begin{bmatrix} x_{i1} & x_{j1} \\ x_{i2} & x_{j2} \end{bmatrix}$$

Es ist ein Verhältnis von Verhältnissen.

Theorem

Unter einer projektiven Transformation bleibt das Doppelverhältnis invariant. Die Längenverhältnisse sind im Gegensatz zu affinen Transformationen nicht invariant.

- Wir leiten die Invarianz des Doppelverhältnisses aus der Geometrie von $\mathcal{P}^1$ her.
- $\mathcal{P}^1$ ist in den $\mathcal{P}^2$ eingebettet.
  Somit kann $\mathcal{P}^1$ als Linie im $\mathcal{P}^2$ aufgefasst werden.
- Eine projektive Transformation im $\mathcal{P}^2$ wirkt dann wie eine projektive Transformation im $\mathcal{P}^1$ auf die Linie.
  Eine Transformation im $\mathcal{P}^1$ entspricht der Multiplikation mit einer invertierbaren 2×2 Matrix $\mathbf{H}$.

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Wir stellen **H** mittels der standard projektiven Basis dar:

$$\mathbf{H}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sim\mathbf{a}\quad \mathbf{H}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sim\mathbf{b}\quad \mathbf{H}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sim\mathbf{c}$$

$$\mathbf{H}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\end{pmatrix}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sim\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\end{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}\sim\mathbf{c}}_{\Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{\lambda}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\end{pmatrix}^{-1}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{H}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\end{pmatrix}\mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\end{pmatrix}^{-1}\mathbf{c}\right]$$

Beweis.

Invarianz des Doppelverhältnis

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{c}\right]$$

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\delta} \sim \mathbf{d} \Rightarrow \boldsymbol{\delta} \sim \operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{c}\right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{\delta} \sim \operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix} |\mathbf{cb}| \\ |\mathbf{ac}| \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} |\mathbf{db}| \\ |\mathbf{ad}| \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} |\mathbf{db}|/|\mathbf{cb}| \\ |\mathbf{ad}|/|\mathbf{ac}| \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \delta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta = \frac{|\mathbf{ac}|/|\mathbf{bc}|}{|\mathbf{ad}|/|\mathbf{bd}|} = \frac{(a-c)/(b-c)}{(a-d)/(b-d)}$$

Das Doppelverhältnis δ bleibt invariant. $\square$