

Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,
Universität Freiburg





Gliederung

① Projektive Transformationen im \mathcal{P}^2

Nachtrag zu Kegelschnitten

Der degenerierte Kegelschnitt

Das absolute Punktepaar

Anwendung: Berechnung von Winkeln

Nachtrag zu Kegelschnitten

Affine Geometrie: Die Klassifikation von (nicht degenerierten) Kegelschnitten basiert auf den Schnittpunkten des Kegelschnittes mit der unendlich fernen Geraden.

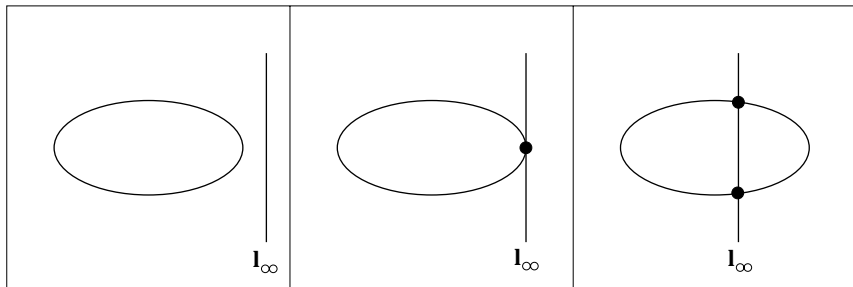
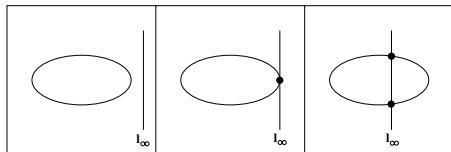


Abbildung: Verschiedene Möglichkeiten wie l_∞ einen Kegelschnitt \mathbb{C} schneiden kann. (1) Ellipse, (2) Parabel (3) Hyperbel

Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der unendlich fernen Geraden

- Die unendlich ferne Gerade ist fix unter affinen Transformationen.
 - Die Schnitte werden erhalten.
- ⇒ Durch eine affine Transformation kann eine Ellipse nicht in eine Parabel oder Hyperbel überführt werden.
- Mittels projektiver Transformationen ist dies möglich.





Wiederholung

- Ein Punkt auf dem Kegelschnitt erfüllt die Formel $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0$.
- Für den dualen Kegelschnitt gilt $\mathbf{l}^T \mathbf{C}^* \mathbf{l} = 0$.
- Ist \mathbf{C} regulär so gilt $\mathbf{C}^* \sim \mathbf{C}^{-1}$.
- \mathbf{C}^* Matrix der Kofaktoren
 \mathbf{C}^* existiert auch, falls \mathbf{C} singularär ist.

Bei regulärem \mathbf{C} gilt: $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{-1} \cdot |\mathbf{C}|$ und $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^* = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{C} = |\mathbf{C}| \cdot \mathbf{I}$

Dann gilt auch: $(\mathbf{C}^*)^* \sim \mathbf{C}$

Beispiel

Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} (\mathbf{b} \times \mathbf{c})^T \\ (\mathbf{c} \times \mathbf{a})^T \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T \end{pmatrix}$$

dann gilt:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}^T (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{c}^T (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{pmatrix} = D \cdot I$$

Dabei ist D das Spatprodukt von \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} :

Das Volumen des Parallelepipeds, das von eben diesen drei Vektoren aufgespannt wird.



Degenerierter Kegelschnitt

Definition (Degenerierter Kegelschnitt)

Man spricht von einem degenerierten Kegelschnitt C , falls C keinen vollen Rang hat.

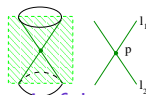
Wir betrachten degenerierte

- Punktkegelschnitte und
- Linienkegelschnitte.

Beispiel (Punktkegelschnitt)

Ein degenerierter Punktkegelschnitt \mathbf{C} kann aus

- zwei Geraden oder
- einer Doppelgeraden bestehen.



Im ersten Fall kann \mathbf{C} durch die zwei Geraden l_1 und l_2 wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{C} \sim \left(\underbrace{l_1 l_2^T}_{\text{Rang 1}} + \underbrace{l_2 l_1^T}_{\text{Rang 1}} \right), \text{ mit Rang von } \mathbf{C} = 2$$

Liegt ein Punkt \mathbf{p}_1 auf l_1 , so gilt:

$$\mathbf{p}_1^T l_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{p}_1^T \mathbf{C} \mathbf{p}_1 \sim \mathbf{p}_1^T (l_1 l_2^T + l_2 l_1^T) \mathbf{p}_1 = 0$$

\mathbf{p}_1 liegt auf dem Kegelschnitt.
Analoges gilt auch für Punkt \mathbf{p}_2 .

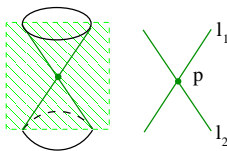
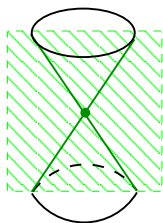
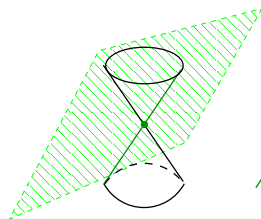
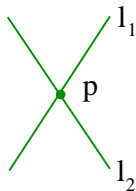


Abbildung: Degenerierter Punktkegelschnitt

- \mathbf{C} ist symmetrisch und hat Rang 2.
- Nullvektor: $\mathbf{p} \sim \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$
- Weiterhin gilt die Pol-Polare Beziehung.
- Im Falle einer Doppelgeraden \mathbf{l} ergibt sich für \mathbf{C} : $\mathbf{C} \sim \mathbf{l} \cdot \mathbf{l}^T$ mit dem Rang 1.



(a) Degenerierter Punktkegelschnitt aus l_1 und l_2 mit Nullraum $\mathbf{p} = l_1 \times l_2$



(b) Degenerierter Punktkegelschnitt mit Doppelgeraden.

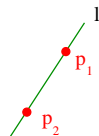


Abbildung: Degenerierte Kegelschnitte



Beispiel (Dualer- oder Linien-Kegelschnitt)

Degenerierte Linienkegelschnitte können

- zwei Punkte (Rang 2)
- oder einen doppelten Punkt (Rang 1) beinhalten.

Betrachten wir folgenden \mathbf{C}^* :

$$\mathbf{C}^* \sim \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2^T + \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1^T$$

Für Geraden durch \mathbf{p}_1 oder durch \mathbf{p}_2 gilt:

$$\mathbf{l}^T \mathbf{p}_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{l}^T \mathbf{p}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{l}^T \mathbf{C}^* \mathbf{l} \sim \mathbf{l}^T (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2^T + \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1^T) \mathbf{l} = 0$$



Das absolute Punktepaar

Definition

Das absolute Punktepaar ist ein degenerierter (dualer -) Linien-Kegelschnitt mit Rang 2 basierend auf den Zirkularpunkten. Für \mathbf{C}_{∞}^* gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\infty}^* &\sim \mathbf{I}\mathbf{J}^T + \mathbf{J}\mathbf{I}^T \sim \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -j & 0 \\ j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ -j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dabei sind \mathbf{I} und \mathbf{J} die Zirkularpunkte.



Ergebnis

$$\mathbf{C}_{\infty}^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{C}_{∞}^* ist das absolute Punktepaar verpackt als singulärer dualer Kegelschnitt.

Dieser ist unter anderem wichtig, wenn ein Kegelschnitt unter einer Punkttransformation \mathbf{H} betrachtet wird.



Wiederholung - Transformationen

Wird ein Punkt \mathbf{x} durch \mathbf{H} auf $\mathbf{x}' \sim \mathbf{H}\mathbf{x}$ transformiert, so werden

... Linien entsprechend $\mathbf{l}' \sim \mathbf{H}^{-T}\mathbf{l}$

... Kegelschnitte durch $\mathbf{C}' \sim \mathbf{H}^{-T}\mathbf{C}\mathbf{H}^{-1}$

Neu: duale Kegelschnitte durch $\mathbf{C}^{*\prime} \sim \mathbf{H}\mathbf{C}^*\mathbf{H}^T$

transformiert.



Invarianz

- Kegelschnitte sind invariant unter einer Transformation, falls ein gleicher Kegelschnitt entsteht.
- Die Zirkularpunkte (das absolute Punktepaar) sind invariant (fix) unter Ähnlichkeitstransformationen.
- Sei $\mathbf{x}' \sim \mathbf{H}_s \mathbf{x}$ eine Ähnlichkeitstransformation, so gilt:

$$\mathbf{C}_\infty^{*'} \sim \mathbf{H}_s \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{H}_s^T \sim \mathbf{C}_\infty^*$$

Ergebnis

Der absolute Kegelschnitt \mathbf{C}_∞^* ist fix unter einer projektiven Transformation \mathbf{H} , genau dann wenn \mathbf{H} eine Ähnlichkeitstransformation ist.



Berechnung von Winkeln im Euklidischen Raum

Der Winkel ϕ zwischen $\mathbf{l} = (l_1 \ l_2 \ l_3)^T$ und $\mathbf{m} = (m_1 \ m_2 \ m_3)^T$ kann im Euklidischen Raum über das Skalarprodukt berechnet werden.

- \mathbf{l} und \mathbf{m} in Normalform: $l_1x + l_2y + l_3 = 0$.
- Normalen der zu \mathbf{l} und \mathbf{m} parallelen Geraden.

$$\mathbf{n}_1 = (l_1 \ l_2)^T \text{ und } \mathbf{n}_2 = (m_1 \ m_2)^T.$$

$$\cos(\phi) = \frac{\mathbf{n}_1^T \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2}{\sqrt{(l_1^2 + l_2^2)(m_1^2 + m_2^2)}}$$



Problem

- Nach einer affinen oder projektiven Transformation ändert sich der Winkel.
- Wie kann man den Winkel ϕ auf der Originalebene mit Messungen auf der affin oder projektiv transformierten Ebene bestimmen?

Lösung

Der Ausdruck kann mit Hilfe des absoluten Punktepaars geschrieben werden:

$$\cos(\phi) = \frac{\mathbf{l}^T \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{m}}{\sqrt{(\mathbf{l}^T \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{l}) \cdot (\mathbf{m}^T \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{m})}}$$



- Im Euklidischen Raum:

$$\cos(\Phi) = \frac{\mathbf{n}_1^T \mathbf{n}_2}{\sqrt{(\mathbf{n}_1^T \mathbf{n}_1) \cdot (\mathbf{n}_2^T \mathbf{n}_2)}} = \frac{\mathbf{I}^T \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{m}}{\sqrt{(\mathbf{I}^T \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{m}^T \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{m})}}$$

- Der Vorteil der zweiten Form besteht in der Invarianz unter projektiven Transformationen.
- Unter einer Punkttransformation \mathbf{H} wird der Zähler wie folgt transformiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^T \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{m} &\rightarrow \mathbf{I}'^T \mathbf{C}_\infty^{*'} \mathbf{m}' \sim (\mathbf{H}^{-T} \mathbf{I})^T \overbrace{(\mathbf{H} \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{H}^T)}^{\text{Rang 2}} \mathbf{H}^{-T} \mathbf{m} \\ &\sim \mathbf{I}^T (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}) \mathbf{C}_\infty^* (\mathbf{H}^T \mathbf{H}^{-T}) \mathbf{m} \\ &\sim \mathbf{I}^T \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{m} \end{aligned}$$

Der Nenner wird ähnlich transformiert. Die Skalierung kürzt sich heraus. Somit ist Berechnung des Ursprungswinkels unter Zuhilfenahme des absoluten Punktepaars auch nach einer affinen oder projektiven Transformation möglich.

$$\cos(\phi') = \frac{l'^T \overbrace{(\mathbf{H}\mathbf{C}_\infty^* \mathbf{H}^T)}^{\mathbf{C}_\infty'^*} m'}{\sqrt{(l'^T (\mathbf{H}\mathbf{C}_\infty^* \mathbf{H}^T) l') \cdot (m'^T (\mathbf{H}\mathbf{C}_\infty^* \mathbf{H}^T) m')}} = \cos(\phi)$$

$\mathbf{C}_\infty'^*$ ist dabei das Bild des absoluten Punktepaars.

Ergebnis

Kann $\mathbf{C}_\infty'^*$ in der transformierten Ebene bestimmt werden, so können alle metrischen Eigenschaften gemessen werden. (u.a. Winkel)

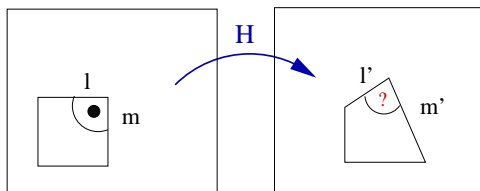


Abbildung: Kann das Bild des absoluten Punktepaars ermittelt werden, so können auch nach einer projektiven Transformation die ursprünglichen Winkel gemessen werden.



Berechnung des Bildes des absoluten Punktepaars

Zur Berechnung von $\mathbf{C}_{\infty}^{*'}$ ist folgendes Ergebnis hilfreich:

Ergebnis

Zwei Geraden l' und m' sind orthogonal, falls $l'^T \mathbf{C}_{\infty}^{*'} m' = 0$.

- Die Geraden sind konjugiert (siehe Pol-Polare Beziehung).
- Sind 5 solche orthogonale Geradenpaare l'_i und m'_i bekannt, so kann $\mathbf{C}_{\infty}^{*'}$ über das Gleichungssystem

$$l'_i \mathbf{C}_{\infty}^{*'} m'_i = 0 \quad i = 1 \dots 5$$

linear berechnet werden.



Alternative Berechnung

Die Rangeigenschaft von $\mathbf{C}_\infty^{* \prime}$ kann genutzt werden.

- $\mathbf{C}_\infty^{* \prime}$ ist ein degenerierter Kegelschnitt (somit singulär) mit Rang 2.
- Es reichen 4 orthogonale Geradenpaare aus, da $\det(\mathbf{C}_\infty^{* \prime}) = 0$ als 5-te (kubische) Bedingung verwendet werden kann.
- Problem:
Da diese Bedingung kubisch ist, resultieren i.a. drei Lösungen.