Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,
Universität Freiburg

Gliederung

Kanonische parametrische Darstellung von Kegelschnitten

- Zwei Punkte auf einer Geraden mit $\mathbf{l}^T\mathbf{a} = 0$ und $\mathbf{l}^T\mathbf{b} = 0$ spannen den Nullraum von $\mathbf{l}^T$ auf.

⇒ Alle Punkte auf $\mathbf{l}$ lassen sich als Linearkombinationen von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ darstellen.

⇒ Parametrische Darstellung der Punkte auf $\mathbf{l}$:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{a}\lambda + \mathbf{b} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit $\mathbf{x} \sim \mathbf{b}$ für $\lambda = 0$ und $\mathbf{x} \sim \mathbf{a}$ für $\lambda \rightarrow \infty$.

- Analog kann eine parametrische Darstellung von Kegelschnitten erfolgen:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{a}\lambda^2 + \mathbf{b}\lambda + \mathbf{c} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie müssen die Punkte **a**, **b** und **c** gewählt werden?

$\lambda = 0$: **c** liegt auf dem Kegelschnitt.

$\lambda \rightarrow \pm\infty$: **a** liegt auf dem Kegelschnitt.

$\Rightarrow$ Es gilt $\mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{a} = 0$ und $\mathbf{c}^T\mathbf{C}\mathbf{c} = 0$.

b ist der Pol von **C** bzgl der Polaren durch **a** und **c**.

Somit gilt:
$\mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{b} = 0$ und $\mathbf{b}^T\mathbf{C}\mathbf{c} = 0$.
a und **b**, sowie **c** und **b** sind konjugierte Punktepaare.

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{H} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \quad \forall \lambda$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}' \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{c} \\ 0 & \mathbf{b}^T\mathbf{C}\mathbf{b} & 0 \\ \mathbf{c}^T\mathbf{C}\mathbf{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \lambda$$

Mit

$$\mathbf{C}' \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{c} \\ 0 & \mathbf{b}^T\mathbf{C}\mathbf{b} & 0 \\ \mathbf{c}^T\mathbf{C}\mathbf{a} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C}' \cdot \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}^T = 0 \quad \forall \lambda$$

$$\Rightarrow (2\alpha + \beta)\lambda^2 = 0 \quad \forall \lambda \Rightarrow \beta = -2\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}' \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch evt. Skalenkorrektur der Vektoren **a**, **b** und **c** immer erreichbar.

Für ein beliebiges λ:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C}' \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Also für $\mathbf{x}'$ auf dem Kegelschnitt $\mathbf{C}'$:

$$\mathbf{x}' \sim \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \sim \mathbf{H}^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{H} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine parametrische Darstellung für die Punkte auf dem Kegelschnitt; die kanonische, parametrische Darstellung des Kegelschnittes.

Kanonische parametrische Darstellung von Kegelschnitten

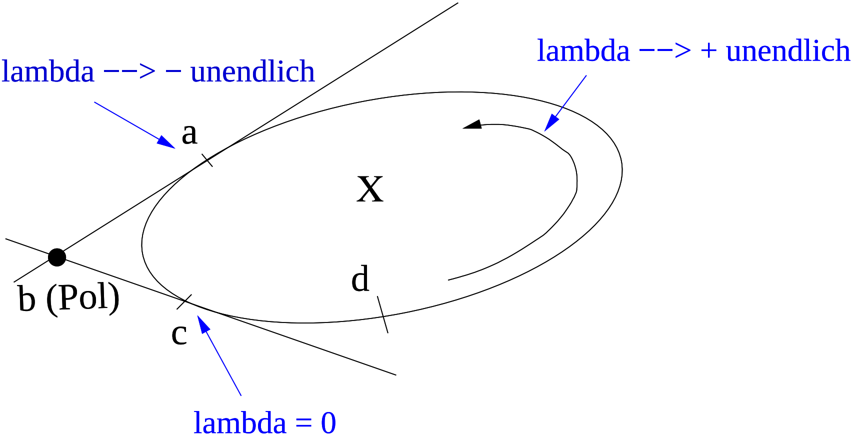

Abbildung: Punkte zur Spezifikation der kanonischen, parametrischen ung des Kegelschnittes