Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,
Universität Freiburg

Gliederung

Gliederung

Der projektive Raum - Punkte im $\mathcal{P}^3$

- Punkte $\mathbf{X} \sim \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ t \end{pmatrix}$

... im Endlichen $\mathbf{X} \sim \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix}$

... im Unendlichen $\mathbf{X} \sim \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 0 \end{pmatrix}$

Gliederung

Ebene

- Ebenengleichung: $ax + by + cz + d = 0$ (Inzidenz)
- Ein Punkt $\mathbf{X}$ liegt auf der Ebene $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^T$, wenn gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = 0$$

- 3 Freiheitsgrade gegeben durch das Verhältnis $\{a : b : c : d\}$

Ebene - Punkt

Berechnung der Ebene

Drei nicht kollineare Punkte definieren eine Ebene. Berechnung mittels Bestimmung des Nullraums

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \mathbf{X}_2^T \\ \mathbf{X}_3^T \end{bmatrix}}_{3\times 4,\ \text{Rang } 3} \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$$

Punkt auf der Ebene

Ein Punkt $\mathbf{X}$ auf der Ebene ist linear abhängig von den drei Punkten $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ und $\mathbf{X}_3$, die die Ebene definieren.

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3 \end{bmatrix} = 0$$

Drei Ebenen definieren einen Punkt

Schnittpunkt dreier Ebenen ergibt i.a. einen Punkt.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1^T \\ \boldsymbol{\pi}_2^T \\ \boldsymbol{\pi}_3^T \end{bmatrix}}_{3\times 4,\ \text{Rang } 3} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Das Vertauschen der Rollen von Punkten und Ebenen wird uns im $\mathcal{P}^3$ noch häufiger begegnen (Ebenen-Punkt Dualismus)

Gliederung

Dualismus zwischen Punkt und Ebene

Analog zum Punkt - Geraden Dualismus in der projektiven Ebene $\mathcal{P}^2$, existiert auch im $\mathcal{P}^3$ ein ähnlicher Dualismus.

Ergebnis (Dualismus im $\mathcal{P}^3$)

Im projektiven Raum $\mathcal{P}^3$ besteht ein Dualismus zwischen **Punkt und Ebene**. Man erhält ein duales Ergebnis, wenn man die Rollen von Punkt und Ebene vertauscht.

Gliederung

Die unendlich ferne Ebene π_∞

- Analog zur unendlich fernen Geraden kann man die unendlich ferne Ebene beschreiben durch:

$$\pi_\infty \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Parallele Geraden schneiden sich in einem Punkt auf π_∞.

  Parallele Ebenen schneiden sich in einer Geraden auf π_∞.
- Eine Ebene π schneidet π_∞ in $\mathbf{l}_\infty$, die unendlich ferne Gerade von π (im Koordinatensystem von π).

Satz

Die unendlich ferne Ebene ist eine Fixebene unter projektiven Transformationen **H** des Raumes, genau dann, wenn **H** eine affine Transformation ist (nicht punktweise fix, bis auf i.a. 3 Punkte).

$$\mathbf{H}_{4\times 4} \sim \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Lokalisierung von $\boldsymbol{\pi}_\infty$ in einer projektiven Rekonstruktion des Raumes entspricht einer affinen Rekonstruktion.

Gliederung

Freiheitsgrade

- Eine Gerade kann über ihre Schnittpunkte mit zwei vorgegebenen Ebenen beschrieben werden.
- Jeder Schnittpunkt hat 2 Freiheitsgrade.

$\Rightarrow$ Die Gerade hat vier Freiheitsgrade

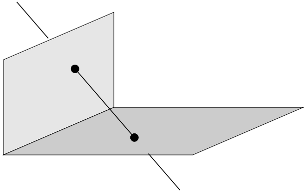

Abbildung: Die Gerade im Raum (4 Freiheitsgrade)

Parametrisierung über zwei Punkte

Seien **A**, **B** Punkte im $\mathcal{P}^3$.
Erzeugung von Punkten auf der Gerade durch **A** und **B**:

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{A} + \mathbf{B}\lambda, \quad \text{Span von } \mathbf{A} \text{ und } \mathbf{B}$$

(Bündel von Punkten **X** auf der Gerade.)
Seien **a**, **b** inhomogene Koordinaten zweier Punkte im Raum.

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mu = \mathbf{a}(1 - \mu) + \mathbf{b} \cdot \mu$$

Übergang zu homogenen Koordinaten:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{pmatrix} (1 - \mu) + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix} \mu \Rightarrow \mathbf{X} \sim \mathbf{A} + \mathbf{B} \underbrace{\left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right)}_{\lambda}$$

Parametrisierung über zwei Ebenen

Dual zum Span aus Punkten: Gerade als Schnitt zweier Ebenen

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ liegen auf $\boldsymbol{\pi}_1$ und $\boldsymbol{\pi}_2$.

$$\mathbf{A}^T\boldsymbol{\pi}_1 = \mathbf{B}^T\boldsymbol{\pi}_1 = 0$$
$$\mathbf{A}^T\boldsymbol{\pi}_2 = \mathbf{B}^T\boldsymbol{\pi}_2 = 0$$

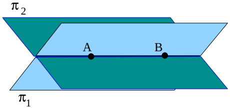

Abbildung: Gerade im $\mathcal{P}^3$ als Schnitt zweier Ebenen.

$\Rightarrow$ Die Geradenpunkte bilden den Nullraum von $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_1^T \\ \boldsymbol{\pi}_2^T \end{pmatrix}$.

- Der Span der Ebenen $\boldsymbol{\pi}_1 + \lambda\boldsymbol{\pi}_2$ ergibt ein Ebenenbündel mit der Geraden als Achse.

Repräsentation als Plückermatrix **L**- Herleitung

Gerade durch **A** und **B**: $\mathbf{X} \sim \mathbf{A} + \mathbf{B}\lambda$

Für den Schnittpunkt **X** gilt: $\mathbf{X}^T\boldsymbol{\pi} = 0$

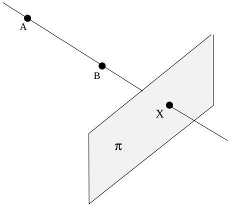

Abbildung: Schnittpunkt der Geraden durch die Punkte **A** und **B** mit der Ebene $\boldsymbol{\pi}$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\lambda)^T\boldsymbol{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^T\boldsymbol{\pi} = -\lambda\mathbf{B}^T\boldsymbol{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\mathbf{A}^T\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{B}^T\boldsymbol{\pi}}$$

Für den Schnittpunkt **X** ergibt sich:

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{A} - \mathbf{B}\frac{\mathbf{A}^T\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{B}^T\boldsymbol{\pi}} \sim \mathbf{A}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\pi} - \mathbf{B}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\pi} = \underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{A}^T)}_{\mathbf{L}\text{ (Plückermatrix)}}\boldsymbol{\pi}$$

Plückermatrix **L**

Die Plücker Matrix ist die Repräsentation der Geraden durch eine homogene, schiefsymmetrische 4×4 Matrix $\mathbf{L}$.
$\mathbf{L}$ wird die Plückermatrix der Geraden durch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ genannt. Sie hat die Form

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

Analogie zum $\mathcal{P}^2$

Die Plückermatrix $\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{A}^T$ ist eine Generalisierung der Geraden im $\mathcal{P}^2$. Hier wurde die Linie über die Inzidenz $\mathbf{x}^T\mathbf{l} = 0$ dargestellt, mit $\mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Erweitert man dies, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &\sim \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ \mathbf{p} &\sim \mathbf{l} \times \mathbf{m} \sim [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_\times \cdot \mathbf{m} \\ &\sim \underbrace{(\mathbf{a}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{a}^T)}_{3\times 3 \text{ Plückermatrix}} \cdot \mathbf{m} \end{aligned}$$

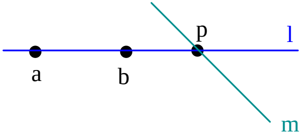

Abbildung: Plückermatrix als Generalisierung der Gerade im $\mathcal{P}^2$

(Eigentlich: $\mathbf{a}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{a}^T = -[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_\times = [\mathbf{b} \times \mathbf{a}]_\times$)

Übergang

Die Wahl der Punkte spielt bei der Berechnung von $\mathbf{L}$ keine Rolle. Man wähle statt $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}' \sim \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} \\ \text{und} \quad & \mathbf{B}' \sim \gamma\mathbf{A} + \delta\mathbf{B} \end{aligned}$$

Für $\mathbf{L}'$ folgt somit:

$$\mathbf{L}' = \mathbf{A}'\mathbf{B}'^T - \mathbf{B}'\mathbf{A}'^T = (\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B})(\gamma\mathbf{A}^T+\delta\mathbf{B}^T) - (\gamma\mathbf{A}+\delta\mathbf{B})(\alpha\mathbf{A}^T+\beta\mathbf{B}^T)$$

$$= \underbrace{(\alpha\cdot\delta - \beta\cdot\gamma)}_{c} \cdot \underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{A}^T)}_{\mathbf{L}} \sim \mathbf{L}$$

Die Plückermatrizen $\mathbf{L}'$ und $\mathbf{L}$ sind bis auf einen Skalarfaktor gleich.

Eigenschaften von $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{L}$ ist eine schiefsymmetrische 4×4 Matrix.

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{L}^T = -\mathbf{L}$

- $\mathbf{L}$ hat Rang 2 $\Rightarrow |\mathbf{L}| = 0$

$\Rightarrow$ Plückerbedingung: $|\mathbf{L}| = (af - be + cd)^2 = 0$

- 4 Freiheitsgrade: $6_{\text{ (Parameter)}} - 1_{\text{ (Skalierung)}} - 1_{(|\mathbf{L}|=0)}$

Eigenschaften von $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

- Schnittpunkt Gerade - Ebene: $\mathbf{X} \sim \mathbf{L}\boldsymbol{\pi}$
- Jede Spalte von $\mathbf{L}$ ist ein Punkt auf der Geraden.
- Insbesondere ist
  $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\pi}_\infty \sim \mathbf{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \sim \begin{pmatrix} c & e & f & 0 \end{pmatrix}^T$
  der Schnittpunkt mit der unendlich fernen Ebene
- Enthält eine Ebene $\boldsymbol{\pi}$ die Gerade $\mathbf{L}$, so gibt es keinen Schnittpunkt. Gilt $\mathbf{L}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$, liegt $\mathbf{L}$ ganz in $\boldsymbol{\pi}$.

Plückerbedingung

Die letzte Spalte von $\mathbf{L}$ beschreibt einen Punkt $\mathbf{p}$ auf der unendlich fernen Ebene. Betrachten wir folgende Zerlegung von $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{l}]_\times & \mathbf{p} \\ -\mathbf{p} & 0 \end{pmatrix}$$

Die 3×3 Untermatrix $[\mathbf{l}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \end{pmatrix}$ ist schiefsymm. und besitzt die Form eines Axiators mit $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} -d & b & -a \end{pmatrix}^T$.

Ergebnis (Plückerbedingung)

Mit $|\mathbf{L}| = (af - be + cd)^2$ gilt $(|\mathbf{L}| = (\mathbf{l}^T\mathbf{p})^2 = 0) \Rightarrow$

$$\underbrace{\mathbf{l}^T\mathbf{p} = 0}_{\text{Plückerbedingung}}$$

Sei $\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{L} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{a}^T & \mathbf{a} - \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T - \mathbf{a}^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} [\mathbf{b} \times \mathbf{a}]_\times & \mathbf{a} - \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T - \mathbf{a}^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} [\mathbf{l}]_\times & \mathbf{p} \\ -\mathbf{p}^T & 0 \end{pmatrix}$$

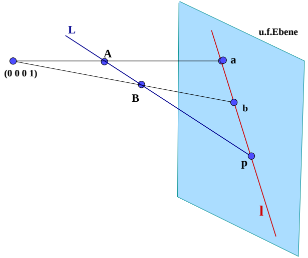

Abbildung: Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{L}$ mit π_∞

$\mathbf{p}$ ist Schnittpunkt von $\mathbf{L}$ mit der u.f.E.
$\mathbf{l}$ ist die Projektion von $\mathbf{L}$ auf π_∞.

Ergebnis (Plückerbedingung)

Aus $\det(\mathbf{L}) = (\mathbf{p}^T\mathbf{l})^2 = 0$ folgt die Plückerbedingung $\mathbf{p}^T\mathbf{l} = 0$.
($\mathbf{p}$ liegt auf $\mathbf{l}$)

Gerade als Schnitt zweier Ebenen - Plückerdarstellung

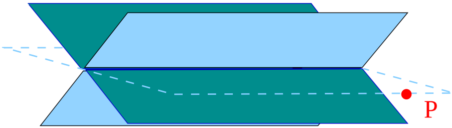

Abbildung: $\boldsymbol{\pi}_1 + \boldsymbol{\pi}_2\lambda$ erzeugt ein Ebenenbündel um die Achse (Schnittgerade von $\boldsymbol{\pi}_1$ und $\boldsymbol{\pi}_2$). Gesucht ist die Ebene, die von $\mathbf{p}$ und der Achse bestimmt wird.

- Der Span $\boldsymbol{\pi}_1 + \boldsymbol{\pi}_2\lambda$ erzeugt ein Ebenenbündel mit der Geraden als Achse.
- Eine Ebene wird von der Schnittachse und einem Punkt $\mathbf{p}$ bestimmt.

Duale Plückermatrix

- Für die Ebene, die sowohl $\mathbf{p}$, als auch die Achse enthält, gilt : $(\boldsymbol{\pi}_1 + \boldsymbol{\pi}_2\lambda)^T\mathbf{p} = 0$.
- Wir können die duale Plückermatrix aus dem Span zweier Ebenen herleiten.

$$\boldsymbol{\pi} \sim \underbrace{(\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{\pi}_2^T - \boldsymbol{\pi}_2\boldsymbol{\pi}_1^T)}_{\mathbf{L}^*}\mathbf{p}$$

- $\mathbf{L}^*$ ist die duale Form von $\mathbf{L}$
- Um den Zusammenhang zwischen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}^*$ zu verdeutlichen ist folgende Eigenschaft hilfreich:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^* = \mathbf{L}^*\mathbf{L} = (\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{\pi}_2^T - \boldsymbol{\pi}_2\boldsymbol{\pi}_1^T)(\mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{A}^T) = \mathbf{0}$$

Übergang zur dualen Form

$$\mathbf{L}^* \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{q}]_\times & \mathbf{m} \\ -\mathbf{m}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{l}]_\times & \mathbf{p} \\ -\mathbf{p}^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}^* \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \to \begin{pmatrix} [\mathbf{q}]_\times & \mathbf{m} \\ -\mathbf{m}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0};$$

$$[\mathbf{q}]_\times \mathbf{p} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} \sim \mathbf{q} = \alpha \mathbf{p}; \quad \mathbf{m}^T \mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{m}^T \mathbf{q} = 0$$

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^* \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{l}]_\times & \mathbf{p} \\ -\mathbf{p}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mathbf{q}]_\times & \mathbf{m} \\ -\mathbf{m}^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha [\mathbf{l}]_\times [\mathbf{p}]_\times - \mathbf{p}\mathbf{m}^T = \mathbf{0} & [\mathbf{l}]_\times \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}$$

Umformung: $[\mathbf{a}]_\times [\mathbf{b}]_\times = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) I$

$\alpha [\mathbf{l}]_\times [\mathbf{p}]_\times - \mathbf{p}\mathbf{m}^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{p}(\alpha \mathbf{l}^T - \mathbf{m}^T) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{m} = \alpha \mathbf{l}$

$$\mathbf{L}^* \sim \begin{pmatrix} \alpha [\mathbf{p}]_\times & \alpha \mathbf{l} \\ -\alpha \mathbf{l}^T & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{p}]_\times & \mathbf{l} \\ -\mathbf{l}^T & 0 \end{pmatrix}$$

Korrespondenz

Ergebnis (Übergang zur dualen Form)

Aus $\mathbf{L}$ wird $\mathbf{L}^*$ (und umgekehrt) durch vertauschen von $\mathbf{l}$ und $\mathbf{p}$.

Beide Formen bezeichnen dieselbe Linie,

$\cdots$ als Verbindungsgerade zweier Punkte.

Mit $\mathbf{X} \sim \mathbf{L}\boldsymbol{\pi}$ erhält man den Schnittpunkt.

$\cdots$ als Schnittgerade zweier Ebenen.

Mit $\boldsymbol{\pi} \sim \mathbf{L}^*\mathbf{X}$ erhält man die Ebene, die von der Linie und dem Punkt $\mathbf{X}$ aufgespannt wird.

Beispiel (Schnittpunkt dreier Ebenen)

Seien die 3 Ebenen $\boldsymbol{\pi}_1$, $\boldsymbol{\pi}_2$ und $\boldsymbol{\pi}_3$ gegeben und bezeichnen wir den Schnittpunkt mit $\mathbf{X}$

1. Zunächst können wir die Achse zweier Ebenen berechnen:

$$\mathbf{L}^* \sim (\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{\pi}_2^T - \boldsymbol{\pi}_2\boldsymbol{\pi}_1^T) \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{p}]_\times & \mathbf{l} \\ -\mathbf{l}^T & 0 \end{pmatrix}$$

2. Über die Korrespondenz wird $\mathbf{L}^* \rightarrow \mathbf{L}$ umgeformt.

$$\mathbf{L} \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{l}]_\times & \mathbf{p} \\ -\mathbf{p}^T & 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt ergibt sich aus: $\mathbf{X} \sim \mathbf{L}\boldsymbol{\pi}_3$

Beispiel (Ebene durch drei Punkte)

Dual zur Beschreibung des Schnittpunktes von drei Ebenen kann die Ebene $\boldsymbol{\pi}$ durch drei Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ berechnet werden:

$$\mathbf{L} \sim \mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{A}^T \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{l}]_\times & \mathbf{p} \\ -\mathbf{p}^T & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{L}^* \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{p}]_\times & \mathbf{l} \\ -\mathbf{l}^T & 0 \end{pmatrix}$$

Die Ebene wird beschrieben durch

$$\mathbf{L}^*\mathbf{C} \sim \boldsymbol{\pi}$$

Beispiel

- $\mathbf{L}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{L}$ liegt in $\boldsymbol{\pi}$.
- $\mathbf{L}^*\mathbf{A} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}$ liegt auf $\mathbf{L}$.
- $\mathbf{L}\mathbf{L}^* = \mathbf{L}^*\mathbf{L} = \mathbf{0}$

Schnittpunkt zweier Geraden im Raum

Zwei Geraden $\mathbf{L}_1 \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{l_1}]_\times & \mathbf{p_1} \\ -\mathbf{p_1}^T & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{L}_2 \sim \begin{pmatrix} [\mathbf{l_2}]_\times & \mathbf{p_2} \\ -\mathbf{p_2}^T & 0 \end{pmatrix}$ schneiden sich im Raum

$$\Leftrightarrow \mathbf{p}_1^T \mathbf{l}_2 + \mathbf{p}_2^T \mathbf{l}_1 = 0$$

oder $\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^* + \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1^* = \mathbf{0}$

oder $\mathrm{Rang}(\mathbf{L_1} \mathbf{L}_2^*) = 1$

oder $\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^* \mathbf{L_1} = \mathbf{0}$

Begründung

Sei $\mathbf{A}$ auf $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{S}$ der Schnittpunkt zwischen $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$.
Dann gilt:

$$\mathbf{L}_1 \sim \mathbf{A}\mathbf{S}^T - \mathbf{S}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} [\mathbf{s} \times \mathbf{a}]_\times & \mathbf{a} - \mathbf{s} \\ (\mathbf{s} - \mathbf{a})^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 \sim \mathbf{B}\mathbf{S}^T - \mathbf{S}\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} [\mathbf{s} \times \mathbf{b}]_\times & \mathbf{b} - \mathbf{s} \\ (\mathbf{s} - \mathbf{b})^T & 0 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{s}, \quad \mathbf{l}_1 = \mathbf{s} \times \mathbf{a}$$
$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{s}, \quad \mathbf{l}_2 = \mathbf{s} \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{p}_1^T \mathbf{l}_2 = \mathbf{a}^T(\mathbf{s} \times \mathbf{b}) = \det(\mathbf{asb})$$
$$\mathbf{p}_2^T \mathbf{l}_1 = \mathbf{b}^T(\mathbf{s} \times \mathbf{a}) = \det(\mathbf{bsa}) = -\det(\mathbf{asb})$$

Auch die restlichen Kriterien lassen sich herleiten, indem man zunächst zeigt:

$$\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2^* \sim \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}^T$$

wobei $\boldsymbol{\pi}$ die gemeinsame Ebene bezeichnet.