Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,
Universität Freiburg

Gliederung

Gliederung

Quadriken

Die **Punktgleichung** der Quadrik im $\mathcal{P}^3$ lautet:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = 0$$

- $\mathbf{Q}$ ist eine 4x4 symmetrische Matrix ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$).
- Rang i.a. 4.
- Gilt $|\mathbf{Q}| = 0$ (Rang($\mathbf{Q}$) ≤ 3), so handelt es sich um eine degenerierte Quadrik.

Duale Quadrik (Ebenengleichung)

- $\mathbf{Q}^*$ ist die duale Quadrik, identifiziert mit der adjungierten Matrix.
- Eine Ebene $\boldsymbol{\pi}$, für die gilt

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{Q}^* \boldsymbol{\pi} = 0$$

  tangiert den Kegelschnitt.
- Die Quadrik hat 9 Freiheitsgrade, $(16_{\text{Parameter}} - 6_{\text{Symmetrie}} - 1_{\text{Homogenität}})$
- Jede Ebene schneidet eine Quadrik in einem Kegelschnitt.

Polarität

- Die Pol-Polare Beziehungen bzgl. Quadriken besteht im $\mathcal{P}^3$ zwischen Ebenen und Punkten.

$$\underbrace{\boldsymbol{\pi}}_{\text{Polare von } \mathbf{x}} \sim \mathbf{Q} \underbrace{\mathbf{x}}_{\textit{Pol}}$$

- Ist $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{Q}$, so ist $\mathbf{Qx}$ die **Tangentialebene** an $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{x}$.
- In einem Punkt der Quadrik können viele (unendlich viele) Geraden tangential liegen. Diese liegen alle in einer Ebene.
- Ist $\mathbf{x}$ nicht auf $\mathbf{Q}$, so schneidet die Ebene $\mathbf{Qx}$ die Quadrik $\mathbf{Q}$ in einem Kegelschnitt. Die Verbindungsgerade zwischen jedem Punkt dieses Kegelschnitts mit $\mathbf{x}$ ist Tangente an $\mathbf{Q}$.

Gliederung

Transformationen

H sei eine allgemeine projektive Transformation.

Punkttransformation

$$\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{HX} \sim \mathbf{X}'$$

Ebenentransformation

$$\boldsymbol{\pi} \longrightarrow \mathbf{H}^{-T}\boldsymbol{\pi} \sim \boldsymbol{\pi}'$$

Geradentransformation

$$\mathbf{L} \sim \mathbf{AB}^{T} - \mathbf{BA}^{T} \qquad \longrightarrow \mathbf{HLH}^{T} \sim \mathbf{L}'$$

$$\mathbf{L}^{*} \sim \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{\pi}_2^{T} - \boldsymbol{\pi}_2\boldsymbol{\pi}_1^{T} \qquad \longrightarrow \mathbf{H}^{-T}\mathbf{L}^{*}\mathbf{H}^{-1} \sim \mathbf{L}^{*\prime}$$

Quadrikentransformation

$$\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{H}^{-T}\mathbf{QH}^{-1} \sim \mathbf{Q}'$$

$$\mathbf{Q}^{*} \longrightarrow \mathbf{HQ}^{*}\mathbf{H}^{T} \sim \mathbf{Q}^{*\prime}$$

Gliederung

Klassifikation von Quadriken

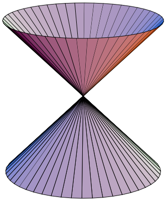
- Eine Quadrik $\mathbf{Q}$ ist symmetrisch und kann durch eine geeignete Abbildung $\mathbf{H}$ auf Diagonalform gebracht werden:

$$\mathbf{Q} \sim \mathbf{H}^T \mathbf{D} \mathbf{H}$$

- $\mathbf{H}$ ist eine orthogonale Matrix.
- $\mathbf{D}$ ist eine Diagonalmatrix. Die Einträge können so umgeformt werden, dass sie aus +1, -1 und 0 (in dieser Reihenfolge) bestehen.
- Die projektiven Äquivalenzklassen einer Quadrik sind durch die Signatur von $\mathbf{D}$ $\quad \sigma(\mathbf{D}) = \#(+1) - \#(-1)$
und den Rang eindeutig festgelegt.
- $\mathbf{Q}$ mit $\mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4)$ korrespondiert zu Punkten die $d_1X^2 + d_2Y^2 + d_3Z^2 + d_4T^2 = 0$ erfüllen.
Für endliche Punkte können wir $T = 1$ setzen.

Degenerierte Quadriken

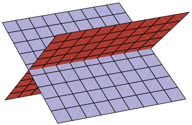
$\mathrm{diag}(1, 1, 1, 0)$
$\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2 = 0$ ein Punkt (Ursprung)



$\mathrm{diag}(1, 1, -1, 0)$
$\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 = \mathbf{Z}^2$ Kegel im Ursprung.

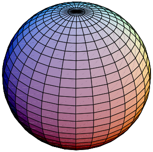
$\mathrm{diag}(1, 1, 0, 0)$
$\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 = 0$ eine Gerade (z-Achse)

$\mathrm{diag}(1, -1, 0, 0)$
$\mathbf{X}^2 = \mathbf{Y}^2$ zwei Ebenen $x = \pm y$

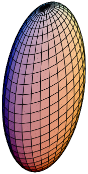


$\mathrm{diag}(1, 0, 0, 0)$
$\mathbf{X}^2 = 0$ eine Doppelebene $x = 0$

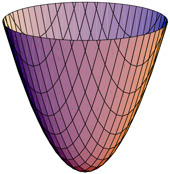
Klassifikation von Quadriken



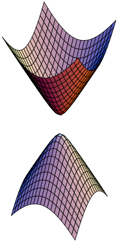
(a) Kugel



(b) Ellipsoid



(c) Paraboloid



(d) zweiseitiger Hyperboloid

Abbildung: Beispiele für nicht degenerierte Quadriken - Sie sind projektiv äquivalent

Klassifikation nicht degenerierter Quadriken

Es gibt folgende Möglichkeiten für Quadriken mit vollem Rang:

$\mathrm{diag}(1,1,1,1)$ $\quad \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2 + 1 = 0$

In diesem Fall hat die Quadrik keine reellen Punkte.

$\mathrm{diag}(1,1,1,-1)$ $\quad \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2 = 1$

Dies stellt eine Kugel, ein Ellipsoid, ein Paraboloid oder ein zweiseitiges Hyperboloid dar.

$\mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$ $\quad \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 = \mathbf{Z}^2 + 1$

Ein einseitiges Hyperboloid, eine Regelquadrik.

Regelquadriken

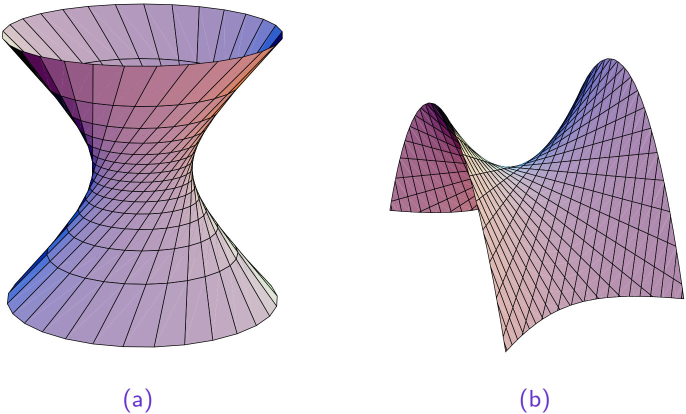


Abbildung: Regelquadriken - Sie sind projektiv Äquivalent

Eigenschaften der Regelquadriken

Eine Regelquadrik ist projektiv äquivalent zu

$$\mathbf{Q} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- Es existieren Geraden, die in die geometrische Figur vollständig hineinpassen.
- Enthalten zwei Familien von Geraden, die ganz „in" der Quadrik liegen. (f_k und g_k: Generatoren)
- Geraden der einen Familie schneiden alle Geraden der anderen Familie, aber keine der eigenen Familie.

Sei $\mathbf{P} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ ein Punkt auf $\mathbf{Q}$.
Die Tangentialebene in $\mathbf{P}$ an $\mathbf{Q}$ wird beschrieben durch:

$$\boldsymbol{\pi} \sim \mathbf{QP} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Welche Eigenschaften besitzen Punkte $\mathbf{x}$, die auf der Tangentialebene $\boldsymbol{\pi}$ und in $\mathbf{Q}$ liegen?

$$\text{Betrachte } \mathbf{x} \text{ mit: } \begin{cases} a) & \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} = 0 \\ b) & \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0 \end{cases}$$

Die erste Bedingung wird von Linearkombinationen von Vektoren, die senkrecht auf $\boldsymbol{\pi}$ stehen, erfüllt.

Alle zu $\boldsymbol{\pi}$ orthogonalen Vektoren ergeben sich aus einer Linearkombination der Spalten von $\boldsymbol{\pi}^{\perp}$:

$$\mathbf{x} \sim \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{\pi}^{\perp}} \cdot \boldsymbol{\xi} \quad \text{mit } \boldsymbol{\xi} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Setzt man $\mathbf{x}$ in die Quadrikengleichung ein: $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0$

$$\boldsymbol{\xi}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} = 0$$

Alle $\boldsymbol{\xi}$ und damit auch alle $\mathbf{x}$, die diese Gleichung erfüllen, liegen auf $\boldsymbol{\pi}$ und auf $\mathbf{Q}$.

$\boldsymbol{\xi}$ gibt homogene Koordinaten auf $\boldsymbol{\pi}$ an.
Löst man nun weiter auf:

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\xi}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\xi}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} = 0$$

- Dies ist die Gleichung eines degenerierten Kegelschnittes, der zwei Geraden auf $\boldsymbol{\pi}$ darstellt.
- Durch jeden Punkt auf der Quadrik gehen zwei Linien $\mathbf{u}_i$ und $\mathbf{v}_i$. Diese werden Generatoren genannt.

- Die Geraden einer Familie schneiden alle Geraden der anderen Familie, aber keine Gerade derselben Familie.
- $\mathbf{u}_0$ und $\mathbf{u}_1$ schneiden sich nicht, sonst müssten drei Geraden in einer Ebene und gleichzeitig auch auf der Quadrik liegen.

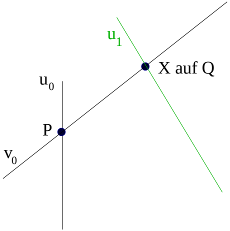


Abbildung: Die Generatoren

Die kubische Wendelinie (twisted cubic)

Im $\mathcal{P}^2$ hat die parametrische Darstellung eines Kegelschnitts die Form:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{H} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Verallgemeinerung auf $\mathcal{P}^3$ liefert:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{H} \begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Raumkurve, die sogenannte kubische Wendelinie (twisted cubic), keine Quadrik!

Die kubische Wendelinie schneidet eine Ebene in drei Punkten.

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} = 0 \quad \text{mit } \mathbf{x} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{H} \begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{lösen}} \lambda_i$$

Beim Einsetzen der λ_i ergeben sich drei Punkte die auf der Ebene, sowie auch auf der kubischen Wendelinie liegen.

Kubische Wendelinie - Beispiele

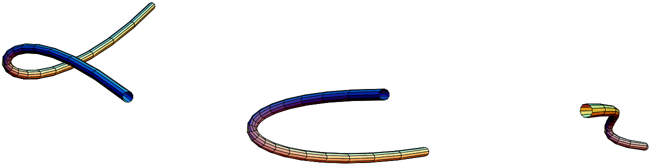


Abbildung: Verschiedene Arten kubischer Wendelinien

Freiheitsgrade

Die kubische Wendelinie hat 12 Freiheitsgrade, die sich aus den 16 Einträgen der 4×4 Matrix $\mathbf{H}$ folgendermaßen ergeben.

- Ein Freiheitsgrad fällt aufgrund homogener Koordinaten weg.
- Die Kurve ist invariant gegenüber einer Umparametrisierung mit $\lambda \rightarrow \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+1}$ (3 Freiheitsgrade).

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \sim \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{H}' \begin{pmatrix} \mu^3 & \mu^2 & \mu^1 & 1 \end{pmatrix}^T \leftrightarrow \mathbf{H} \begin{pmatrix} \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda^1 & 1 \end{pmatrix}^T$ erzeugen projektiv äquivalente Raumkurven.
- Die kubische Wendelinie spielt eine Rolle bei der 2-Sicht Geometrie (Horopter).

Gliederung

Bewegung (Isometrien)

$$\mathbf{X}' \sim \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X}$$

$\mathbf{R}$ ist 3×3 Rotationsmatrix, mit folgenden Eigenschaften:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = I, \quad |\mathbf{R}| = 1$$

$$\Rightarrow \; |\lambda I - \mathbf{R}| = 0$$

Sei $\lambda = 1$:

$$|\lambda I - \mathbf{R}| \overset{(\lambda=1)}{=} |I - \mathbf{R}| = \overbrace{|\mathbf{R}^T|}^{1} \cdot |I - \mathbf{R}| = |\mathbf{R}^T \cdot (I - \mathbf{R})| =$$

$$= |\mathbf{R}^T - I| = |-(I - \mathbf{R}^\mathbf{T})| = (-1)^3 |I - \mathbf{R}| =$$

$$= -|I - \mathbf{R}| \Rightarrow |I - \mathbf{R}| = 0 \qquad \lambda = 1 \text{ ist Eigenwert.}$$

Schraubendekomposition

Sei **a** Achse, dann gilt $\mathbf{Ra} = \mathbf{a}$. Die Achse ist somit der Eigenvektor zum Eigenwert 1. Es gilt auch:

$$\mathbf{R} = e^{[\mathbf{a}]_\times \phi}, \quad ||\mathbf{a}|| = 1 \Rightarrow [\mathbf{a}]_\times^3 = -[\mathbf{a}]_\times$$

Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion führt zu:

$$\mathbf{R} = I + [\mathbf{a}]_\times \phi + \frac{[\mathbf{a}]_\times^2 \phi^2}{2!} + \frac{[\mathbf{a}]_\times^3 \phi^3}{3!} + \cdots$$

Somit kann die Rotation wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= I + [\mathbf{a}]_\times \cdot \sin(\phi) + [\mathbf{a}]_\times^2 \cdot (1 - \cos(\phi)) \\ \mathbf{R}^T &= I - [\mathbf{a}]_\times \cdot \sin(\phi) + [\mathbf{a}]_\times^2 \cdot (1 - \cos(\phi))\end{aligned}$$

(Äquivalent zu Quaternionen)

$$\text{3 Freiheitsgrade} \begin{cases} \mathbf{a}: & \text{2 d.o.f.} \\ \Phi: & \text{1 d.o.f.} \end{cases}$$

Ergebnis (Schraubendekompostition)

Die starre Bewegung im 3 dimensionalen Raum ist äquivalent zu einer Rotation um die Schraubenachse und einer Translation entlang der Schraubenache.
Die Schraubenachse ist parallel zur Rotationsachse $\mathbf{a}$.

Beweis - Schraubendekomposition (1)

Sei $\mathbf{X}' = \mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t}$. Wir zerlegen $\mathbf{t}$ in zwei Komponenten:
$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\parallel} + \mathbf{t}_{\perp}$ (Parallel- und Orthogonalanteil auf $\mathbf{a}$)
Der Versuch, einen Pol wie in 2D zu bestimmen, würde hier liefern:

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{t} = \hat{\mathbf{X}} \Leftrightarrow (\mathbf{R} - I)\hat{\mathbf{X}} = -\mathbf{t}$$

Dies ist nur lösbar, wenn $\mathbf{a}^T\mathbf{t} = 0$, denn $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{R} - I) = \mathbf{0}^T$
$\Rightarrow$ Zerlegung von $\mathbf{t}$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\parallel} + \mathbf{t}_{\perp} = \mathbf{a}\underbrace{(\mathbf{a}^T\mathbf{t})}_{\langle \mathbf{a},\mathbf{t}\rangle} + (I - \mathbf{a}\mathbf{a}^T)\mathbf{t}$$

und Bestimmung von $\hat{\mathbf{X}}$, so dass

$$(\mathbf{R} - I) \cdot \hat{\mathbf{X}} = -\mathbf{t}_{\perp} = (\mathbf{a}\mathbf{a}^T - I) \cdot \mathbf{t}$$

Beweis - Schraubendekomposition (2)

Alle Lösungen $\hat{\mathbf{X}}$ bilden die Schraubenachse. Die Lösungen liegen auf einer Geraden.

Wir bestimmen nun diejenige Lösung $\hat{\mathbf{X}}_0$, die auch $\perp$ auf $\mathbf{a}$ steht.

Die allgemeine Lösung lautet dann$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}_0 + \mathbf{a} \cdot \lambda$

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = (\mathbf{R} - I)^+ (\mathbf{a}\mathbf{a}^T - I)\mathbf{t}$$

$$\text{wobei } (\mathbf{R} - I)^+ = \frac{1}{2(1 - \cos\phi)} \cdot (\mathbf{R}^T - I)$$

$$\text{und } \mathbf{R}^T - I = -[a]_\times \sin(\phi) + [a]_\times^2 (1 - \cos(\phi))$$

$$\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{0} = \frac{-1}{2(1 - \cos(\phi))} \cdot (\mathbf{R}^T - I) \cdot \mathbf{t}$$

Alle $\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}_0 + \mathbf{a}\lambda$ erfüllen $\mathbf{R}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{t}_\perp = \hat{\mathbf{X}}$

Beweis - Schraubendekomposition (3)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t} &= \mathbf{X}' \\
\mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t}_{\parallel} + \mathbf{t}_{\perp} &= \mathbf{X}' \\
\mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t}_{\parallel} + \mathbf{t}_{\perp} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{t}_{\perp} &= \mathbf{X}' - \hat{\mathbf{X}} \\
\mathbf{R}(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) + \mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{t}) &= \mathbf{X}' - \hat{\mathbf{X}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Schraubendekomposition

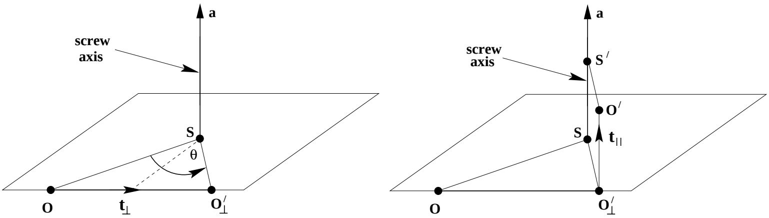


Abbildung: 3d-Euklidische Bewegung und Schraubendekomposition

Freiheitsgrade - Isometrie

Die starre Bewegung (Isometrie) besitzt 6 Freiheitsgrade.

- Rotationsachse $\mathbf{a}$: 2 dof
- Winkel ϕ: 1 dof
- Translation $\mathbf{t}$: 3 dof

Affine Transformation

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} & \cdots & & \\ & \cdots & & \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Affine Transformationen lassen die unendlich ferne Ebene $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ unverändert.

12 Freiheitsgrade

Projektive Transformation

$$\mathbf{H} \sim 4 \times 4 \text{ Matrix}$$

Projektive Transformationen erhalten Koinzidenzen, Tangenten, etc.
Geraden werden auf Geraden und Ebenen auf Ebenen abgebildet.

15 Freiheitsgrade

Gliederung

Der absolute Kegelschnitt

Im $\mathcal{P}^2$ wurde das absolute Punktepaar als degenerierter Linienkegelschnitt eingeführt. Er verpackt die Zirkularpunkte.

Definition (Der absolute Kegelschnitt im $\mathcal{P}^3$)

Im $\mathcal{P}^3$ ist der absolute Kegelschnitt $\boldsymbol{\Omega}_\infty$ ein Punktkegelschnitt auf der unendlich fernen Ebene $\boldsymbol{\pi}_\infty$.
Ein Punkt $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}^T$ liegt auf $\boldsymbol{\Omega}_\infty$, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{ und } t = 0$$

Somit enthält $\boldsymbol{\Omega}_\infty$ nur komplexe Punkte.

Invarianz des absoluten Kegelschnittes

Auf π_∞ wird der absolute Kegelschnitt durch

$\mathbf{C} \sim I_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Ergebnis (Invarianz des absoluten Kegelschnittes)

Der absolute Kegelschnitt bleibt unter einer projektiven Transformation $\mathbf{H}$ genau dann fest (i.a. nicht punktweise), wenn $\mathbf{H}$ eine Ähnlichkeitstransformation (Bewegung und Skalierung) ist.

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & s \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

- Alle Kugeln schneiden $\boldsymbol{\pi}_\infty$ in $\boldsymbol{\Omega}_\infty$.
- Eine Ebene $\boldsymbol{\pi}$ schneidet $\boldsymbol{\pi}_\infty$ in der unendlich fernen Linie $\mathbf{l}_\infty$ dieser Ebene.
- Die Schnittpunkte von $\mathbf{l}_\infty$ mit $\boldsymbol{\Omega}_\infty$ sind die Zirkularpunkte von $\boldsymbol{\pi}$.

Ergebnis

Eine Bestimmung von $\boldsymbol{\Omega}_\infty$ und damit auch $\boldsymbol{\pi}_\infty$ in einer projektiven Rekonstruktion ist äquivalent zu einer metrischen Rekonstruktion.

Ähnlich zum $\mathcal{P}^2$ gilt dies bis auf eine Ähnlichkeitstransformation.

Anwendung

- Winkel können mit Hilfe von $\mathbf{\Omega}_\infty$ bestimmt werden.
- Seien $\mathbf{d_1}$ und $\mathbf{d_2}$ Richtungsvektoren zweier Geraden. (Schnittpunkte mit $\boldsymbol{\pi}_\infty$ -auch Ebene der Richtungen genannt.)
- Dann gilt für den Winkel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{d_1}^T\mathbf{d_2}}{\sqrt{\mathbf{d_1}^T\mathbf{d_1}}\sqrt{\mathbf{d_2}^T\mathbf{d_2}}} = \frac{\mathbf{d_1}^T\mathbf{\Omega}_\infty\mathbf{d_2}}{\sqrt{(\mathbf{d_1}^T\mathbf{\Omega}_\infty\mathbf{d_1})(\mathbf{d_2}^T\mathbf{\Omega}_\infty\mathbf{d_2})}}$$

- Vorteil dieser Repräsentation:
  Sie ist auch nach einer projektiven Transformation des Raumes gültig.

Berechnung

Orthogonalität heißt, dass $\mathbf{d_1}$ und $\mathbf{d_2}$ konjugierte Punkte bezüglich der Polariät $\mathbf{\Omega_\infty}$ sind. Dann gilt $\mathbf{d_1}^T \mathbf{\Omega_\infty} \mathbf{d_2} = 0$.

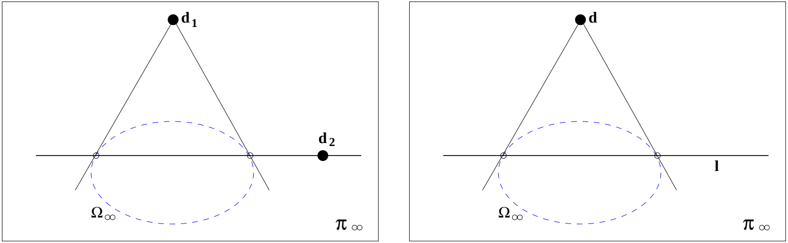


Abbildung: Die Richtungen orthogonaler Geraden sind konjungierte Punkte bzgl. des absoluten Kegelschnitts. Die Schnittgerade von Ebenen und der Schnitt dazu orthogonaler Geradenrichtungen mit der unendlich fernen Ebene stehen in einer Pol-Polaren Beziehung bezüglich $\mathbf{\Omega_\infty}$

Dual zu $\mathbf{\Omega}_\infty$: die absolute duale Quadrik

Die absolute duale Quadrik $\mathbf{Q}_\infty^*$ beschreibt die Ebenen, die tangential zu $\mathbf{\Omega}_\infty$ liegen.

$$\text{Sei } \mathbf{Q} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & k \end{pmatrix} \text{ mit } \mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X} = 0$$

$k \to \infty \Rightarrow X_4 \to 0$

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & k^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \sim \mathbf{Q}_\infty^*$$

Eigenschaften

- Die absolute duale Quadrik ist eine symmetrische 4×4 Matrix.
- Als degenerierte Quadrik hat sie keinen vollen Rang (Rang drei).

$\Rightarrow$ $det(\mathbf{Q}) = 0$

- Freiheitsgrade: $10_{\text{Parameter}} - 1_{\text{Skalierung}} - 1_{\text{Rang}} = 8$
- $\boldsymbol{\pi}_\infty$ ist der Nullraum von $\mathbf{Q}^*_\infty$

Winkel zwischen Ebenen $\boldsymbol{\pi}_1$ und $\boldsymbol{\pi}_2$

$$\boldsymbol{\pi}_1 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{n_1} \\ t_1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{\pi}_2 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{n_2} \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Ergebnis

Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist gegeben durch

$$\cos(\phi) = \frac{\mathbf{n_1}^T \mathbf{n_2}}{\sqrt{\mathbf{n_1}^T \mathbf{n_1}}\sqrt{\mathbf{n_2}^T \mathbf{n_2}}} = \frac{\boldsymbol{\pi}_1^T \mathbf{Q}_\infty^* \boldsymbol{\pi}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{\pi}_1^T \mathbf{Q}_\infty^* \boldsymbol{\pi}_1)(\boldsymbol{\pi}_2^T \mathbf{Q}_\infty^* \boldsymbol{\pi}_2)}}$$

Der Weg zur metrischen Rekonstruktion - Freiheitsgrade

- Eine projektive Transformation besitzt 15 Freiheitsgrade.
- 8 Freiheitsgrade für die Bestimmung von $\mathbf{Q}^*_\infty$, die metrische Rekonstruktion erlaubt.
  - 3 Parameter zur Bestimmung der unendlich fernen Ebene.
  - 5 Parameter zur Bestimmung des absoluten Kegelschnittes.
- 1 Freiheitsgrad für die Skalierung.
- 6 Freiheitsgrade für die 3D Bewegung.