

# Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,  
Universität Freiburg





# Gliederung

## 6 Das Kameramodell

### Endliche Kameras

- Die Lochkamera

- Die Projektive Kamera

### Die projektive Kamera

- Spalten von  $\mathbf{P}$

- Zeilen von  $\mathbf{P}$

- Hauptpunkt und Hauptachse

- Abstand zwischen Ursprung und Kamerazentrum

### Die unendliche Kamera

- Bewegung der Kamera in Richtung der Hauptachse

- Zoomen

- Hierarchie der affinen, unendlichen Kameras

- Affine Kamera



# Gliederung

## 6 Das Kameramodell

### Endliche Kameras

- Die Lochkamera

- Die Projektive Kamera

### Die projektive Kamera

- Spalten von  $\mathbf{P}$

- Zeilen von  $\mathbf{P}$

- Hauptpunkt und Hauptachse

- Abstand zwischen Ursprung und Kamerazentrum

### Die unendliche Kamera

- Bewegung der Kamera in Richtung der Hauptachse

- Zoomen

- Hierarchie der affinen, unendlichen Kameras

- Affine Kamera

# Die Lochkamera

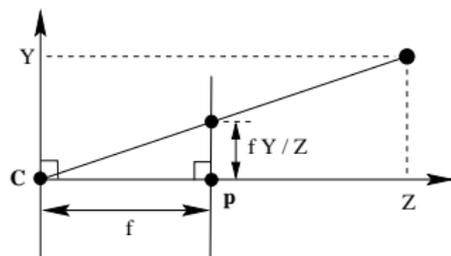
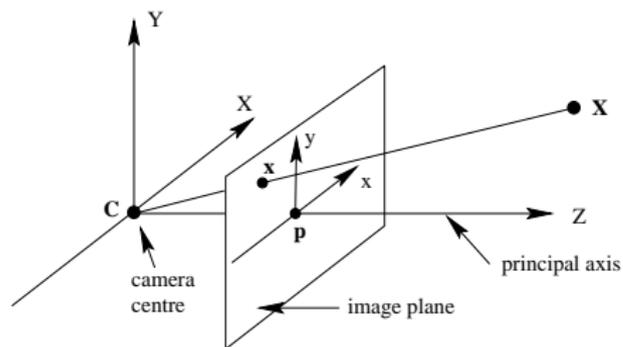
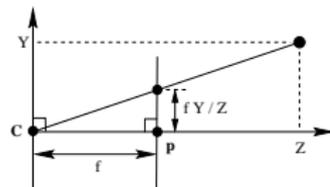
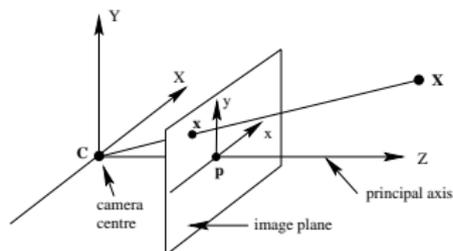


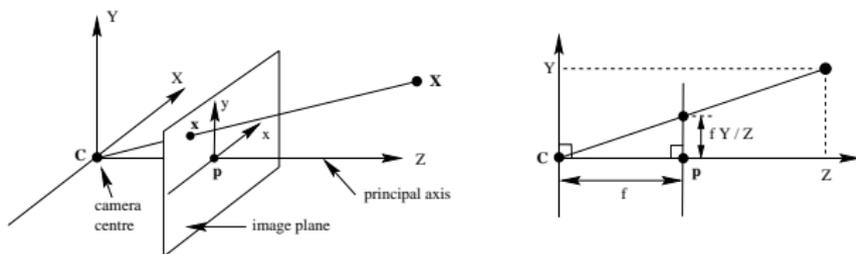
Abbildung: Die Lochkamera.

## Die Lochkamera



- Die Lochkamera ist eine Abbildung des 3D-Raumes auf das 2D-Bildkoordinatensystem durch eine **Zentralprojektion**.
- Ein Weltpunkt  $\mathbf{X} \sim (x \ y \ z \ 1)^T$  wird dabei auf einen Punkt  $\mathbf{U}_E = \frac{f}{z} (x \ y \ z)^T$  auf der Bildebene abgebildet.
- Es entsteht der Bildpunkt  $\mathbf{u} = \frac{f}{z} (x \ y)^T$ .

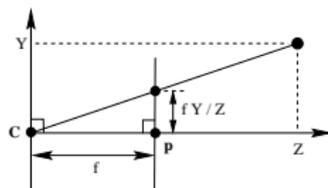
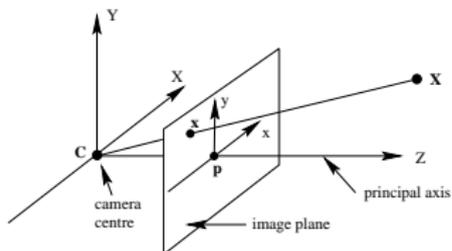
## Die Lochkamera



Darstellung als Matrixmultiplikation mit homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} fx \\ fy \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Die Lochkamera



- $\mathbf{p}$  ist der Hauptpunkt.
- Die Hauptebene ist die Ebene parallel zur Bildebene durch  $\mathbf{C}$ .

- $f$  beschreibt die fokale Länge.  $\mathbf{p}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$

## Verschiebung des Kamerakoordinatensystems

Verschiebt man das Koordinatensystem in der Kameraebene um  $(h_u \ h_v)^T$ , so gilt für den Bildpunkt:

$$\mathbf{u} = \frac{f}{z} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{z}x + h_u \\ \frac{f}{z}y + h_v \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{z}x + h_u \\ \frac{f}{z}y + h_v \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} fx + h_u \cdot z \\ fy + h_v \cdot z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} f & 0 & h_u & 0 \\ 0 & f & h_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

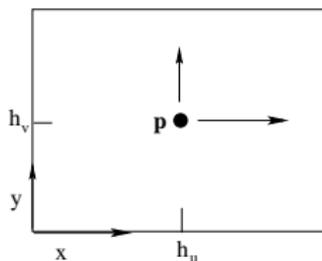


Abbildung:  
Verschiebung des  
Koordinatensystems



$$\mathbf{K} \sim \begin{pmatrix} f & 0 & h_u \\ 0 & f & h_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Ergebnis

Die  $3 \times 4$  Kameramatrix  $\mathbf{P}$  bildet einen Weltpunkt  $\mathbf{X}$  ( $4 \times 1$ ) auf einen Bildpunkt  $\mathbf{U}$  ( $3 \times 1$ ) ab.

$$\mathbf{U} \sim \mathbf{P}\mathbf{X} \quad \mathbf{U} \sim \mathbf{K} [I|\mathbf{0}]\mathbf{X} \text{ (bisher)}$$

Die  $3 \times 3$  Matrix  $\mathbf{K}$  wird Kalibriermatrix genannt.

## 3D-Translation und Rotation der Kamera

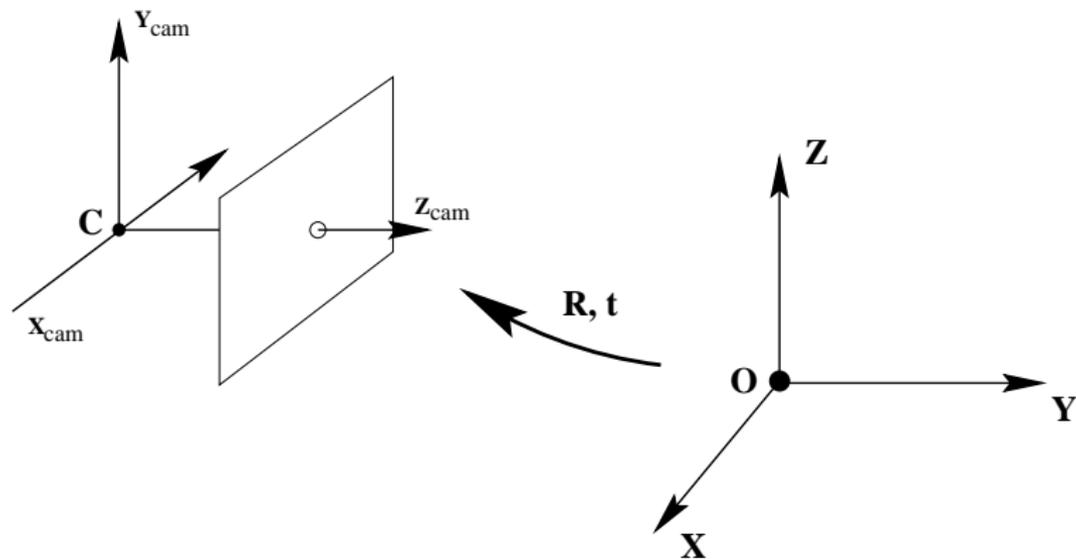


Abbildung: Euklidische Transformation zwischen Welt und Kamerakoordinatensystem



## 3D-Translation und Rotation der Kamera

Wird die Kamera im Raum bewegt, wird ein Weltpunkt im Weltkoordinatensystem durch

$$\mathbf{x} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\mathbf{c} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

transformiert.

- $\mathbf{C} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ 1 \end{pmatrix}$  ist das **Kamerazentrum (Projektionszentrum)** einer projektiven Kamera im Weltkoordinatensystem.
- Es ist der einzige Punkt im Raum, der kein Bild hat:  $\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{0}$ . (Natürlich nur unter der theoretischen Annahme, dass die Kamera nach allen Seiten "sieht".)



Für die Kameramatrix ergibt sich:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{K}(I|\mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\mathbf{c} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \sim \mathbf{K}(\mathbf{R} | -\mathbf{R}\mathbf{c})\mathbf{X}$$

## Ergebnis (Lochkamera)

$$\mathbf{u} \sim \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{R}(I; -\mathbf{c})}_{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{X}$$

Die Kameramatrix  $\mathbf{P}$  einer Lochkamera besitzt 9 Freiheitsgrade.

## Die Projektive Kamera

Projektive Kameras können aus nicht quadratischen Pixeln aufgebaut sein. Dies verändert die Kalibriermatrix  $\mathbf{K}$  zu

$$\mathbf{K} \sim \begin{pmatrix} k_u & s & h_u \\ & k_v & h_v \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

- Dabei bezeichnet  $s$  die Schiefe, die bei rechtwinkligen Pixeln Null ist. In der Regel ist der Parameter  $s$  nahe Null.
- $k_u/k_v$  ist das Verhältnis zwischen den Seitenlängen der Pixel.

$$k_u = m_x f, \quad k_v = m_y f$$

ist die fokale Länge in Pixel-Koordinaten in x- bzw.

y-Richtung.

# Eigenschaften der Kameramatrix

## Die Kameramatrix

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{K}_{3 \times 3} \mathbf{R}_{3 \times 3} [I | -\mathbf{c}]_{3 \times 4} \sim [\mathbf{M}_{3 \times 3} | \mathbf{p}_{3 \times 1}]$$

beschreibt die allgemeine projektive Kamera.

- Jede  $3 \times 4$  Matrix  $\mathbf{P}$  beschreibt eine **endliche projektive Kamera**, falls die Submatrix  $\mathbf{M}$  nicht singulär ist.
- Bei einer **endlichen projektiven Kamera** befindet sich das Kamerazentrum im Endlichen:  $\mathbf{C} \sim (\mathbf{c}^T \ 1)^T$ .

$\mathbf{P}_{3 \times 4}$  hat 11 **Freiheitsgrade**.

(=  $12_{\text{Parameter}} - 1_{\text{Skalenfaktor}}$ )

- Für **Kameras im Unendlichen** ist  $\mathbf{M}$  singulär und  $\mathbf{C} \sim (\mathbf{c}^T \ 0)^T$ .

Zu diesem Kameratyp zählt die affine Kamera. Sie stellt eine Verallgemeinerung der Parallelprojektion dar.



## Berechnung von $\mathbf{P}$ , $\mathbf{K}$ , $\mathbf{R}$ , $\mathbf{C}$

Sei  $\mathbf{P} \sim (\mathbf{M}, \mathbf{p})$ .

$\mathbf{M}$  ist  $3 \times 3$  Matrix und  $\mathbf{p}$  ein  $3 \times 1$  Spaltenvektor.

- $\mathbf{M} \sim \mathbf{K}\mathbf{R}$
- $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{K} \underbrace{\mathbf{R}\mathbf{R}^T}_I \mathbf{K}^T = \mathbf{K}\mathbf{K}^T$
- $\mathbf{K}$  ist eine obere Dreiecksmatrix und kann aus  $\mathbf{K}\mathbf{K}^T$  mittels Cholesky-Zerlegung berechnet werden.
- $\mathbf{R} \sim \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$
- $\mathbf{C}$  ist Nullraum von  $\mathbf{P}$



## Zerlegung von $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\mathbf{K}^T &= \begin{pmatrix} k_u & s & h_u \\ 0 & k_v & h_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_u & 0 & 0 \\ s & k_v & 0 \\ h_u & h_v & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_u^2 + s^2 + h_u^2 & sk_v + h_u h_v & h_u \\ \cdot & k_v^2 + h_v^2 & h_v \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



# Gliederung

## 6 Das Kameramodell

### Endliche Kameras

Die Lochkamera

Die Projektive Kamera

### Die projektive Kamera

Spalten von  $\mathbf{P}$

Zeilen von  $\mathbf{P}$

Hauptpunkt und Hauptachse

Abstand zwischen Ursprung und Kamerazentrum

### Die unendliche Kamera

Bewegung der Kamera in Richtung der Hauptachse

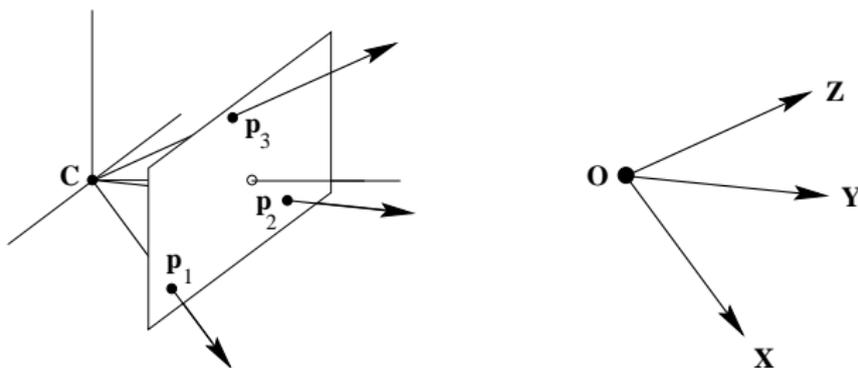
Zoomen

Hierarchie der affinen, unendlichen Kameras

Affine Kamera

## Die projektive Kamera - Spalten von $\mathbf{P}$

Ziel dieses Abschnittes ist, die geometrische Bedeutung der verschiedenen Komponenten von  $\mathbf{P}$  zu klären.



**Abbildung:** Die Bildpunkte, die durch die ersten drei Spalten von  $\mathbf{P}$  gegeben sind, sind die Fluchtpunkte der Richtungen der Weltachsen.



## Die projektive Kamera - Spalten von $\mathbf{P}$

Betrachten wir zunächst die Spalten von  $\mathbf{P} \sim (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3 \ \mathbf{p}_4)$ .  
Die Spaltenvektoren  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ , und  $\mathbf{p}_3$  sind die Bilder der  
Fluchtpunkte der x, y und z-Richtung.

$$\mathbf{p}_1 \sim \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

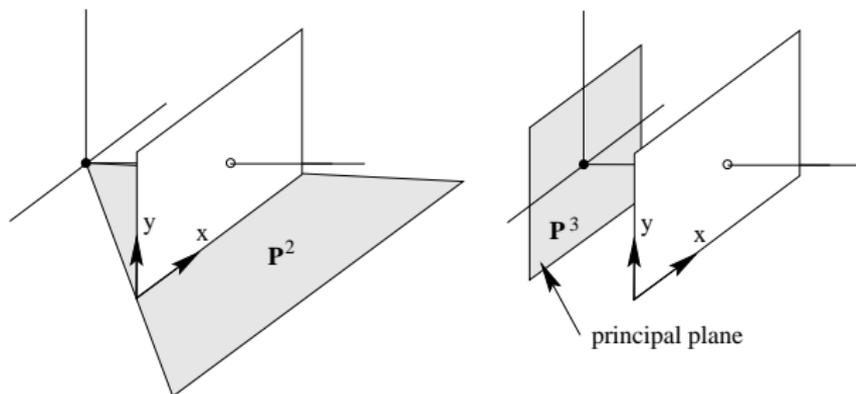
$$\mathbf{p}_2 \sim \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{p}_3 \sim \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{p}_4 \sim \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$\mathbf{p}_4$  ist das Bild des Weltkoordinatenursprungs.

## Zeilen von $\mathbf{P}$



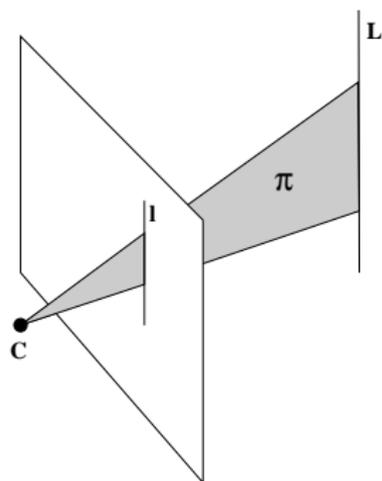
**Abbildung:** Die ersten zwei Zeilen von  $\mathbf{P}$  charakterisieren die Ebenen, die als Rückprojektionen der Bildkoordinatenachsen entstehen. Die dritte Zeile ist die Hauptebene.

## Zeilen von $\mathbf{P}$

Die Zeilen von  $\mathbf{P}$  werden im folgenden mit  $\pi_i^T$  bezeichnet.

$$\mathbf{P} \sim \left( \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \right)^T$$

Zur geometrischen Deutung der Zeilen  $\pi_i^T$  stellen wir zunächst fest: *Eine Gerade  $\mathbf{l}$  in der Bildebene wird durch die Rückprojektion auf eine Ebene im Raum abgebildet.*



## Zeilen von $\mathbf{P}$

### Ergebnis (Rückprojektion einer Bildgeraden)

Sei  $\mathbf{l}$  eine Bildgerade, so stellt ihre Rückprojektion eine Ebene im Raum dar, mit

$$\boldsymbol{\pi}^T \sim \mathbf{l}^T \mathbf{P} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\pi} \sim \mathbf{P}^T \mathbf{l}$$

.

### Beweis.

Sei  $\mathbf{x}$  ein Punkt auf der Ebene  $\boldsymbol{\pi}$  im Raum.  $\boldsymbol{\pi}$  sei die Rückprojektion der Linie  $\mathbf{l}$  in der Bildebene. Dann gilt:

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 0,$$

da die Projektionen aller Punkte der Ebene auf der Geraden liegen. Also gilt

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} = \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Rightarrow \boldsymbol{\pi}^T \sim \mathbf{l}^T \mathbf{P}$$



## Zeilen von $\mathbf{P}$

Es folgt für die Zeilen  $\pi_i^T$  der Matrix  $\mathbf{P}$ :

$\pi_1^T \sim (1 \ 0 \ 0) \mathbf{P}$   $\pi_1$  ist die Rückprojektion der  $y$ -Achse  
 $\mathbf{l} = (1 \ 0 \ 0)^T$  ( $x = 0$ ) der Bildebene.

$\pi_2^T \sim (0 \ 1 \ 0) \mathbf{P}$   $\pi_2$  ist die Rückprojektion der  $x$ -Achse  
 $\mathbf{l} = (0 \ 1 \ 0)^T$  ( $y = 0$ ) der Bildebene.

$\pi_3^T \sim \overbrace{(0 \ 0 \ 1)}^{\mathbf{l}_\infty^T} \mathbf{P}$   $\pi_3$  ist die Rückprojektion der unendlich  
fernen Geraden der Bildebene.

Dies ist die **Hauptebene**, die Ebene parallel zur  
Bildebene durch das Projektionszentrum  $\mathbf{C}$ .

## Hauptpunkt und Hauptachse

$$\mathbf{P} \sim [\mathbf{M} | \mathbf{p}_4] \text{ mit } \mathbf{M} = \mathbf{KR}$$

Da die letzte Zeile von  $\mathbf{K}$  die Form  $\mathbf{k}_3^T \sim (0 \ 0 \ 1)$  besitzt, gilt:

$$\mathbf{M} \sim \mathbf{KR} = \begin{pmatrix} k_u & s & h_u \\ 0 & k_v & h_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \mathbf{r}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \mathbf{r}_3^T \end{pmatrix}$$

$\mathbf{r}_3^T$  ist die 3. Zeile der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$ .

$\mathbf{M}$  kann wie folgt geschrieben werden.

$$\mathbf{M} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \mathbf{m}_2^T \\ \mathbf{m}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \mathbf{m}_2^T \\ \mathbf{r}_3^T \end{pmatrix}$$

# Hauptpunkt und Hauptachse

Normalisierung von  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 & \mathbf{m}_3 \end{pmatrix}^T$  und damit auch von  $\mathbf{P}$  durch

$$\|\mathbf{m}_3\| = 1 \text{ und } \det(\mathbf{M}) > 0. \quad (1)$$

Dadurch ist  $\mathbf{m}_3$  ein Einheitsvektor in Richtung der Hauptachse. Diese Richtung wird auf den Hauptpunkt abgebildet:

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{r}_3 = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3 \rangle \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Ergebnis (Hauptachse)

$\mathbf{m}_3$  gibt die Richtung der Hauptachse an, die auf den Hauptpunkt projiziert wird.  $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_3 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist der Schnittpunkt der Hauptachse mit der unendlich fernen Ebene.

## Abstand zwischen Ursprung und Kamerazentrum

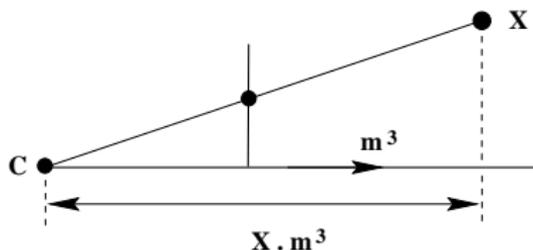


Abbildung: Tiefe eines Punktes

Bei normiertem  $\mathbf{M}$  (Folie 25) stellt  $\mathbf{r}_3$  die Hauptachse dar ( $\mathbf{r}_3 = \mathbf{m}_3$ ).

$$\mathbf{P} = \mathbf{KR} [I | -\mathbf{c}] = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T & -\mathbf{r}_1^T \mathbf{c} \\ \mathbf{r}_2^T & -\mathbf{r}_2^T \mathbf{c} \\ \mathbf{r}_3^T & -\mathbf{r}_3^T \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_4^3 = -\mathbf{m}_3^T \cdot \mathbf{c}$$



## Abstand zwischen Ursprung und Kamerazentrum

Durch die Normalisierung gilt:

$\mathbf{m}_3^T$  ist ein Einheitsvektor in Richtung der Hauptachse.

Dies führt zu folgendem Ergebnis:

### Ergebnis (Abstand)

$d_0$  ist der Abstand zwischen Ursprung und Kamerazentrum in Richtung der Hauptachse mit  $\mathbf{P}_4^3 = -\mathbf{m}_3^T \mathbf{c} = d_0$ .



# Gliederung

## 6 Das Kameramodell

### Endliche Kameras

Die Lochkamera

Die Projektive Kamera

### Die projektive Kamera

Spalten von  $\mathbf{P}$

Zeilen von  $\mathbf{P}$

Hauptpunkt und Hauptachse

Abstand zwischen Ursprung und Kamerazentrum

### Die unendliche Kamera

Bewegung der Kamera in Richtung der Hauptachse

Zoomen

Hierarchie der affinen, unendlichen Kameras

Affine Kamera



# Die unendliche Kamera

Im folgenden soll die affine Kamera hergeleitet werden.

Schritte:

- 1 Wegbewegen der Kamera in Richtung der Hauptachse
- 2 Heranzoomen, so dass ein Objekt seine Größe beibehält

## Bewegung der Kamera in Richtung der Hauptachse

Bei einer Bewegung des Kamerazentrums entlang der Hauptachse um den Parameter  $t$  gilt:

$$\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c} - t\mathbf{r}_3$$

Somit verändert sich die Kameramatrix  $\mathbf{P}$  wie folgt:

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{K}\mathbf{R} [I | -\mathbf{c}] \rightarrow \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T & -\mathbf{r}_1^T(\mathbf{c} - t\mathbf{r}_3) \\ \mathbf{r}_2^T & -\mathbf{r}_2^T(\mathbf{c} - t\mathbf{r}_3) \\ \mathbf{r}_3^T & -\mathbf{r}_3^T(\mathbf{c} - t\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \stackrel{*}{\sim} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T & -\mathbf{r}_1^T\mathbf{c} \\ \mathbf{r}_2^T & -\mathbf{r}_2^T\mathbf{c} \\ \mathbf{r}_3^T & t - \mathbf{r}_3^T\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

(\*) Der Übergang folgt auf Grund der Orthogonalität zwischen den  $\mathbf{r}_i \Rightarrow \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle = \delta_{ij}$  mit  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



## Bewegung der Kamera in Richtung der Hauptachse

### Ergebnis (Verschiebung entlang der Hauptachse)

Bei einer Verschiebung entlang der Hauptachse um  $t$  verändert sich  $\mathbf{P}_4^3$  auf  $d = t - \mathbf{r}_3^T \mathbf{c}$

## Zoomen

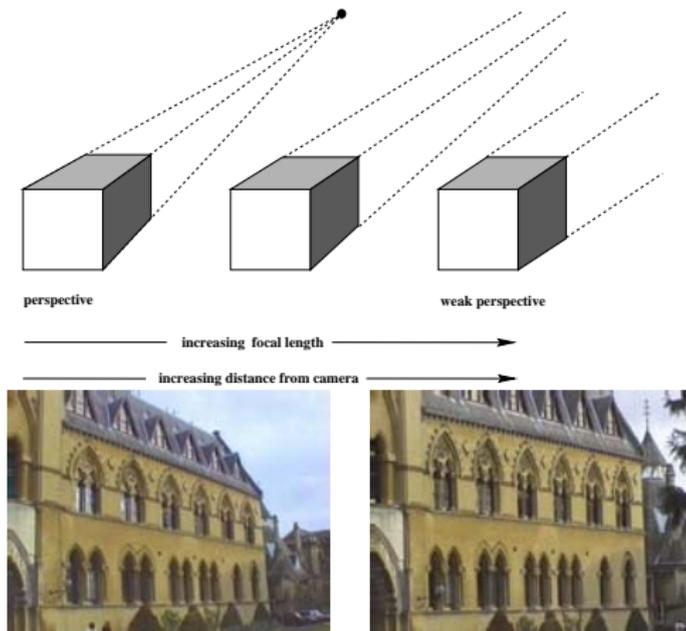
- Falls  $t$  größer wird, wird das Bild kleiner.
- Um diesen Effekt auszugleichen erhöhen wir die Fokallänge.

$$\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K} \begin{pmatrix} \frac{d}{d_0} & & \\ & \frac{d}{d_0} & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Größe des Bildes konstant bleibt.

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{K} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{d_0}{d} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{r}_1^T \mathbf{c} \\ & -\mathbf{r}_2^T \mathbf{c} \\ & d \end{bmatrix} \sim \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T & -\mathbf{r}_1^T \mathbf{c} \\ \mathbf{r}_2^T & -\mathbf{r}_2^T \mathbf{c} \\ \frac{d_0}{d} \mathbf{r}_3^T & d_0 \end{bmatrix}$$

**Abbildung:** Wenn sich Fokallänge sowie Abstand der Kamera vergrößern, bleibt die Bildgröße gleich. Der perspektivische Effekt verschwindet





## Weg zur affinen Kamera

Mit  $d \rightarrow \infty$  erhalten wir die **affine Kamera**  
(das Projektionszentrum liegt im Unendlichen)

$$\mathbf{P}_\infty \sim \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T & -\mathbf{r}_1^T \mathbf{c} \\ \mathbf{r}_2^T & -\mathbf{r}_2^T \mathbf{c} \\ \mathbf{0}^T & d_0 \end{bmatrix}$$

Punkte im Unendlichen werden auf Punkte im Unendlichen abgebildet (affine Eigenschaft).



## Hierarchie der affinen, unendlichen Kameras

Die affine Kamera kann in

$$\mathbf{P}_{\infty} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{2 \times 3} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

zerlegt werden.



## Parallelprojektion

Sei

$$\mathbf{R}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{t} = \mathbf{0}$$

dann erhält man für  $\mathbf{P}$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die  $z$ -Komponenten der Punkte fallen weg.

# Orthographische Projektion

Wählt man  $\mathbf{R}_{2 \times 3}$  und  $\mathbf{t}$  allgemein, erhält man eine **allgemeine orthographische Projektion**. Sie hat die Form:

$$\mathbf{P} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T & t_1 \\ \mathbf{r}_2^T & t_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Diese hat **5 Freiheitsgrade**. Kommt zusätzlich noch eine Skalierung hinzu,

$$\mathbf{P} \sim \begin{pmatrix} k & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T & t_1 \\ \mathbf{r}_2^T & t_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

spricht man von einer **skalierten orthographischen Projektion**. Diese hat **6 Freiheitsgrade**.



## Schwach perspektivische Kamera - affine Kamera

Ist die Skalierung in  $x$ - und  $y$ -Richtung verschieden, erhält man

$$\mathbf{P} \sim \begin{pmatrix} \alpha_x & & \\ & \alpha_y & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T & t_1 \\ \mathbf{r}_2^T & t_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

und damit die **schwach perspektivische Kamera**.

Bei der **affinen Kamera** kommt noch die Schiefe  $s$  hinzu:

$$\mathbf{P}_A \sim \begin{pmatrix} \alpha_x & s & \\ & \alpha_y & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T & t_1 \\ \mathbf{r}_2^T & t_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

Die affine Kamera hat **8 Freiheitsgrade**.



## Affine Kamera - Eigenschaften

- Das Zentrum liegt im Unendlichen.
- Die Hauptebene ist die unendlich ferne Ebene
- Sie bildet die unendlich ferne Ebene auf die unendlich ferne Gerade der Bildebene ab.