

Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,
Universität Freiburg





Gliederung

8 Zwei-Bild Geometrie

Epipolargeometrie

Die Fundamentalmatrix

Korrelation

Schätzung der Fundamentalmatrix

Epipolarlinienhomographie

Homographie infolge einer Ebene

Sonderfälle

Geometrische Darstellung der Fundamentalmatrix



Gliederung

8 Zwei-Bild Geometrie

Epipolargeometrie

Die Fundamentalmatrix

Korrelation

Schätzung der Fundamentalmatrix

Epipolarlinienhomographie

Homographie infolge einer Ebene

Sonderfälle

Geometrische Darstellung der Fundamentalmatrix



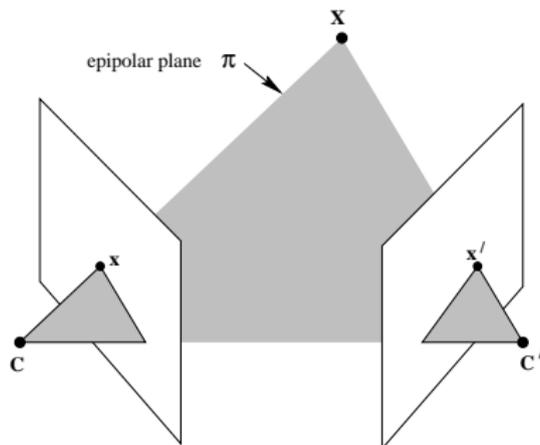
Epipolargeometrie

Die Epipolargeometrie beschreibt die intrinsische projektive Geometrie zwischen zwei Bildaufnahmen einer Szene.

Sie ist unabhängig von der Szenenstruktur und hängt lediglich von den internen Kameraparametern und der relativen Position und Orientierung der Kameras ab.

Die Fundamentalmatrix ist die algebraische Beschreibung der Epipolargeometrie.

Epipolarebene

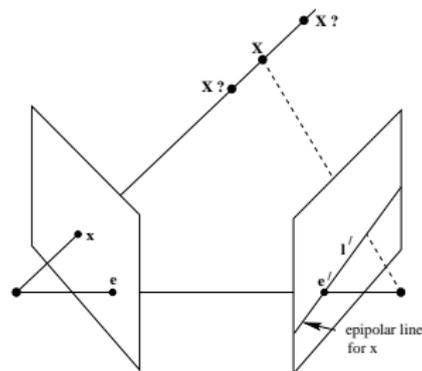


Die Projektionszentren C , C' liegen zusammen mit dem Weltpunkt X und dessen Bildern x und x' auf einer Ebene π .

Epipolarlinie

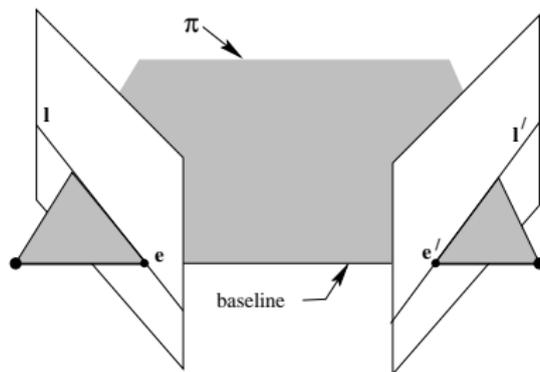
x wird auf einen Strahl rückprojiziert,
auf dem der Weltpunkt X liegt.

Das Bild der
Rückprojektionslinie auf der anderen
Bildebene ist die Epipolarlinie von x .



Der zu x_l korrespondierende Bildpunkt x_j befindet sich auf der
Epipolarlinie l_j .

Epipole



Die Verbindungslinie der Kamerazentren (baseline) schneidet jede Bildebene in den **Epipolen** e und e' .

Jede Ebene, die die Grundlinie enthält, ist eine Epipolarebene und schneidet die Bildebenen in **korrespondierenden Epipolarlinien**.

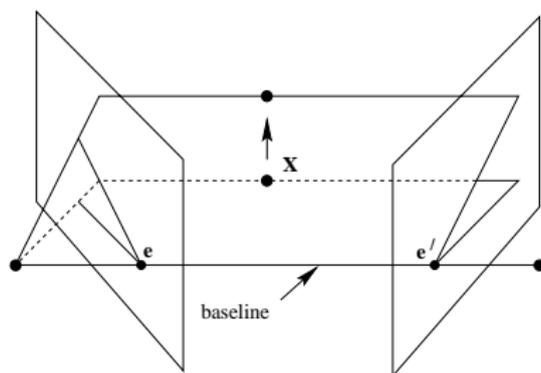


Abbildung: Verändert sich die Position von X , so rotieren die Epipolarebenen um die Verbindungsline der Kamerazentren und bestimmen auf den Bildebenen korrespondierende Epipolarlinien.

Mit I sei die erste und mit J die zweite Bildebene bezeichnet.
Folgende Objekte sind von Bedeutung:

- \mathbf{x}_I und \mathbf{x}_J sind **korrespondierende Bildpunkte**. Der Weltpunkt \mathbf{X} wird von der ersten Kamera auf \mathbf{x}_I und von der zweiten Kamera auf \mathbf{x}_J abgebildet.
- \mathbf{e}_{IJ} und \mathbf{e}_{JI} sind **Epipole**.

Dabei ist \mathbf{e}_{IJ} das Bild des Kamerazentrums \mathbf{C}_J auf der Bildebene I und umgekehrt.

$$\mathbf{e}_{IJ} \sim \mathbf{P}_I \mathbf{C}_J \quad \mathbf{e}_{JI} \sim \mathbf{P}_J \mathbf{C}_I$$

Verbindet man die beiden Kamerazentren, liegt \mathbf{e}_I auf dem Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der Bildebene I und analog liegt \mathbf{e}_J auf der Bildebene J .

- l_I und l_J sind **Epipolar- oder Kernlinien**. Korrespondierende Epipolarlinien werden durch Kamerazentren und Epipolarebene bestimmt.



Gliederung

8 Zwei-Bild Geometrie

Epipolargeometrie

Die Fundamentalmatrix

Korrelation

Schätzung der Fundamentalmatrix

Epipolarlinienhomographie

Homographie infolge einer Ebene

Sonderfälle

Geometrische Darstellung der Fundamentalmatrix



Fundamentalmatrix

Szenario:

Seien zwei Bilder I und J einer Szene gegeben, die mit verschiedenen Kameras aufgenommen worden sind. Es seien korrespondierende Punkte in den beiden Bildern gegeben.

- $\mathbf{x}_I^i \leftrightarrow \mathbf{x}_J^i$ seien korrespondierende Punkte.
- $\mathbf{P}_I^+ \mathbf{x}_I$ ist ein Punkt auf dem Rückstrahl von \mathbf{x}_I .
- Das Bild des Rückstrahles ist die Epipolarlinie in J .



Fundamentalmatrix

Somit gilt für die Epipolarlinie:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_J &\sim \mathbf{e}_{JI} \times \mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^+ \mathbf{x}_I \\ &\sim \underbrace{[\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^+}_{\mathbf{F}_{JI}} \mathbf{x}_I \end{aligned} \quad (1)$$

Ergebnis

\mathbf{F}_{JI} ist die **Fundamentalmatrix**. Die Fundamentalmatrix hängt nur von den Kameramatrizen ab und bildet jeden Bildpunkt \mathbf{x}_I in I auf seine korrespondierende Epipolarlinie \mathbf{l}_J in J durch \mathbf{e}_{JI} ab.

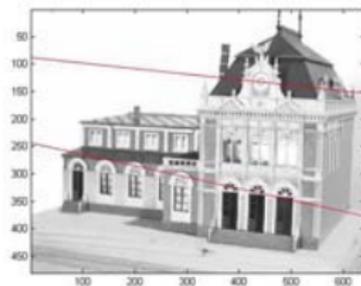
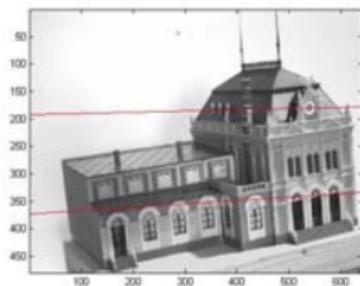
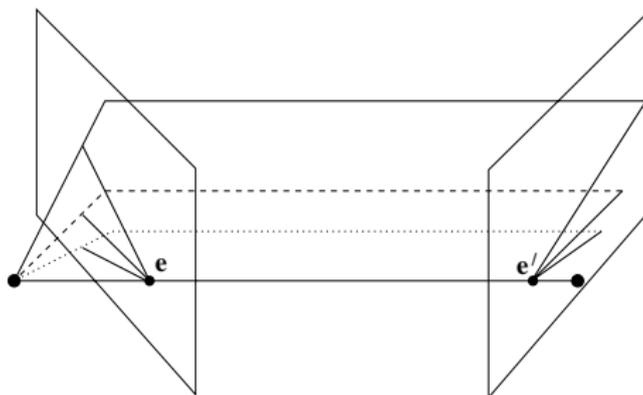


Die Kenntnis der Fundamentalmatrix ist äquivalent zur Kenntnis der Epipolargeometrie.

Weiterhin:

- l_j ist die zum Punkt \mathbf{x}_j gehörige Epipolarlinie.
- l_j ist gemeinsame Epipolarlinie für alle Bildpunkte auf $l_j \sim \mathbf{e}_{ij} \times \mathbf{x}_j$ und umgekehrt. l_i und l_j sind korrespondierende Epipolarlinien.
- Jede Ebene durch \mathbf{C}_i und \mathbf{C}_j schneidet die Bildebene I und die Bildebene J in korrespondierenden Epipolarlinien.

Abbildung: Epipolarlinien - Translation und Rotation



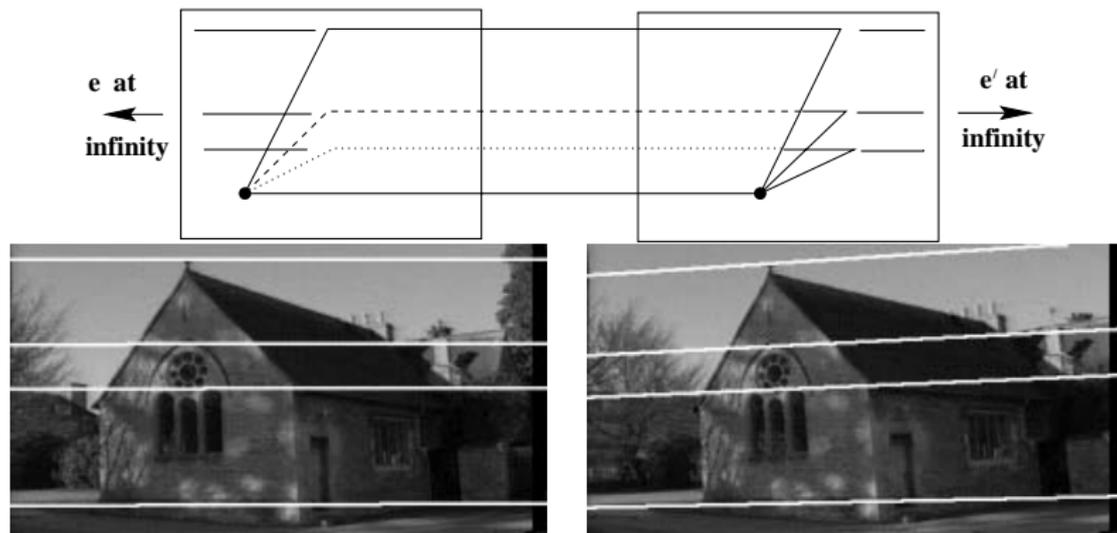


Abbildung: Bewegung parallel zur Bildebene

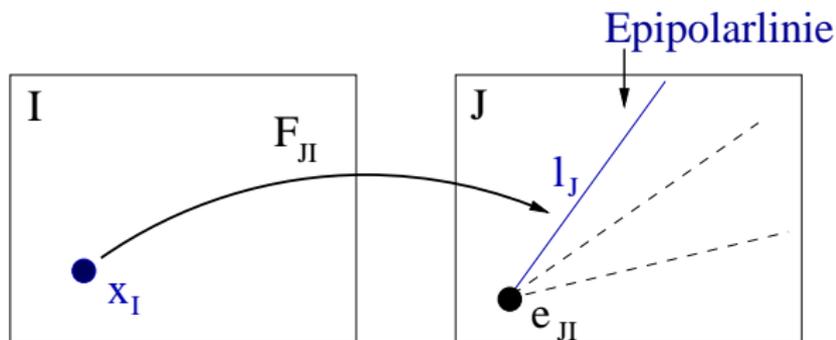


Abbildung: Korrelation zwischen Punkten und Linien

Die Fundamentalmatrix liefert eine Korrespondenz zwischen Punkten und Linien $l_J \sim F_{JI}x_I$.

$$F_{JI} \sim [e_{JI}]_{\times} P_J P_I^+$$



Freiheitsgrade

- $\mathbf{F}_{JJ} \sim [\mathbf{e}_{JJ}]_{\times} \mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^+$.
- Da $[\mathbf{e}_{JJ}]_{\times}$ singularär ist, ist auch \mathbf{F}_{JJ} singularär mit Rang 2:

$$\det(\mathbf{F}_{JJ}) = 0 \quad \text{Singularitätsbedingung}$$

Ergebnis (Freiheitsgrade)

Die Fundamentalmatrix besitzt 7 Freiheitsgrade



- Die Epipole sind die Nullvektoren (rechter und linker) der Fundamentalmatrix.

Es gilt $\mathbf{F}_{JI}\mathbf{e}_{IJ} = \mathbf{0}$, da

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{JI}\mathbf{e}_{IJ} &\sim \mathbf{e}_{JI} \times \mathbf{P}_J\mathbf{P}_I^+\mathbf{e}_{IJ} \\ &\sim \mathbf{e}_{JI} \times \mathbf{e}_{JI} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

(Der Epipol \mathbf{e}_{IJ} wird über $\mathbf{P}_J\mathbf{P}_I^+$ auf den Epipol \mathbf{e}_{JI} abgebildet.)

- Außerdem gilt: $\mathbf{e}_{JI}^T\mathbf{F}_{JI} = \mathbf{0}^T$.

Ergebnis

Die Epipole können über die Berechnung des linken bzw. rechten Nullvektors von \mathbf{F}_{JI} bestimmt werden.

Schätzung der Fundamentalmatrix

Ergebnis (Epipolarbedingung)

Für korrespondierende Punkte $\mathbf{x}_I \leftrightarrow \mathbf{x}_J$ gilt:

$$\mathbf{x}_J^T \mathbf{F}_{JI} \mathbf{x}_I = 0$$

Beweis.

Für die Epipolarlinie \mathbf{l}_J zu \mathbf{x}_I gilt:

$$\mathbf{l}_J \sim \mathbf{F}_{JI} \mathbf{x}_I.$$

Für korrespondierende Punkte $\mathbf{x}_I \leftrightarrow \mathbf{x}_J$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_J^T \mathbf{l}_J &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{x}_J^T \mathbf{F}_{JI} \mathbf{x}_I &= 0 \end{aligned}$$





Weitere Eigenschaften:

$$\mathbf{F}_{IJ} \sim \mathbf{F}_{JI}^T.$$

Dies kann aus der Epipolarbedingung hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_J^T \mathbf{F}_{JI} \mathbf{x}_I &= 0 & \mathbf{x}_I^T \mathbf{F}_{IJ} \mathbf{x}_J &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{x}_J^T \mathbf{F}_{IJ}^T \mathbf{x}_I &= 0 \text{ und} & \mathbf{F}_{IJ} &\sim \mathbf{F}_{JI}^T \end{aligned}$$



Schätzung aus 7 Punktkorrespondenzen

\mathbf{F} ist 3×3 Matrix mit $|\mathbf{F}| = 0$.

\mathbf{F} lässt sich theoretisch aus 7 Korrespondenzen berechnen (nichtlinear i.a. drei Lösungen).

$$\mathbf{x}_j^T \mathbf{F} \mathbf{x}_j = 0 \longrightarrow \underbrace{(\mathbf{x}_j^T \otimes \mathbf{x}_j^T)}_{\mathbf{A}_{(7 \times 9)}} \mathbf{f} = 0 \quad \text{mit } \mathbf{f}_{(9 \times 1)} = \text{vec}(\mathbf{F})$$

\mathbf{A} hat einen 2-dimensionalen Nullraum $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \lambda \mathbf{f}_2$

Einsetzen der erhaltenen Lösung in die Bedingung $\det(\mathbf{F}) = 0$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1^{11} + \lambda f_2^{11} & f_1^{12} + \lambda f_2^{12} & \dots \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{F}_1 + \lambda \mathbf{F}_2| = 0$$

Man erhält 3 Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Schätzung mit mehr als 7 Punkten

Aus mehreren Korrespondenzen lässt sich \mathbf{F} mit linearen Methoden schätzen.

Die Bedingung $|\mathbf{F}| = 0$ muss im nicht störungsfreien Fall hinterher erzwungen werden.

n Korrespondenzen $\longrightarrow \mathbf{A}$ ist $n \times 9$ Matrix.

Störungsfreier Fall

$$\text{Rang}(\mathbf{A}) = 8$$

Die eindeutige Lösung erhält man hier durch den Nullvektor von \mathbf{A} : $\mathbf{f} = \text{null}(\mathbf{A})$. Die Bedingung $\det(\mathbf{A}) = 0$ ist hier automatisch gegeben.



Schätzung mit mehr als 7 Punkten

mit Störungen (≥ 9 Punktkorrespondenzen)

$$\text{Rang}(\mathbf{A}) = 9$$

Eine Näherungslösung erhält man hier über die SVD: $\mathbf{A} = \mathbf{Y}\mathbf{S}\mathbf{W}^T$. \mathbf{Y} und \mathbf{W} sind orthogonale Matrizen; \mathbf{S} ist eine (rechteckige) Diagonalmatrix mit neun sortierten Diagonalelementen (Singularwerte). Im störungsfreien Fall ist das letzte Diagonalelement exakt Null und die Lösung die letzte Spalte der Matrix \mathbf{W} . Sie ist gleichzeitig der rechte Nullvektor von \mathbf{A} . Im allgemeinen *nicht störungsfreien* Fall ist der letzte Singularwert nur ungefähr gleich Null. Als Lösung \mathbf{f} wird wieder die zugehörige letzte Spalte von \mathbf{W} genommen.



Schätzung mit mehr als 7 Punkten

⇒ $\det(\mathbf{F}) = 0$ muss jetzt erzwungen werden.

$$\text{Erneut SVD } \mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$$

- \mathbf{D} ist eine Diagonalmatrix. Die Einträge sind der Größe nach in absteigender Reihenfolge geordnet.
- Im störungsfreien Fall (\mathbf{F} singulär) ist der letzte Wert auf der Diagonalen Null.
- Sonst: letzte Komponente von \mathbf{D} auf 0 setzen → Singularität wird erzwungen.
(mit geringstem Abstand in der Frobenius-Norm)



Gliederung

8 Zwei-Bild Geometrie

Epipolargeometrie

Die Fundamentalmatrix

Korrelation

Schätzung der Fundamentalmatrix

Epipolarlinienhomographie

Homographie infolge einer Ebene

Sonderfälle

Geometrische Darstellung der Fundamentalmatrix

Epipolarlinienhomographie

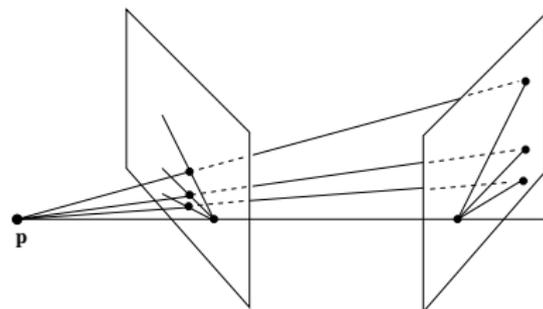
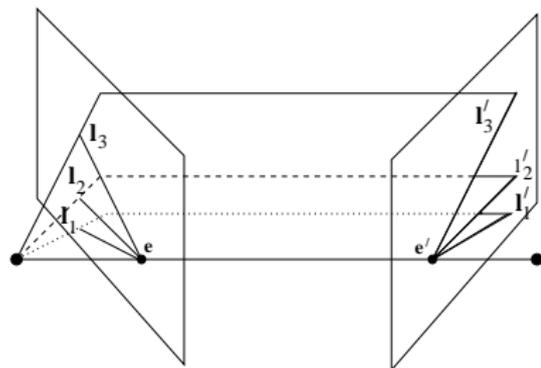


Abbildung: Epipolarlinienhomographie

Epipolarlinienhomographie (2)

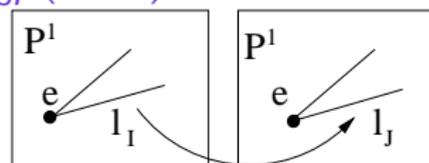
Die Epipolargeometrie wird algebraisch vollständig von der Fundamentalmatrix erfasst.

Die Epipolargeometrie ist gegeben durch

- 1 die Epipole e_{JI} , e_{IJ} (4 dof, je 2 dof)
- 2 und der Zuordnung $l_I \in e_{IJ}^\perp \leftrightarrow l_J \in e_{JI}^\perp$ (3 dof).

e_{IJ}^\perp ist der dem Epipol zugehörige komplementäre Orthogonalraum.

$$\mathcal{P}^1 \rightarrow \mathcal{P}^1$$



Epipolarlinienhomographie mit 3 Parametern.

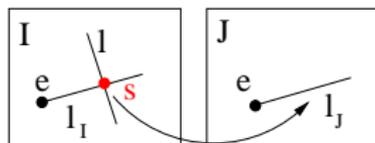
$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Konstruktion der Epipolarlinienhomographie

- Eine Linie

l auf I schneidet die Epipolarlinie l_I in

$$s \sim l \times l_I.$$



- s wird auf die korrespondierende Epipolarlinie l_J auf der Bildebene J abgebildet.

$$l_J \sim F_{JI}(l \times l_I)$$

- Voraussetzung: l darf nicht durch den Epipol gehen.

$$l^T e_{IJ} \neq 0$$

- Wähle $l = e_{IJ}$ (somit $l^T e_{IJ} = e_{IJ}^T e_{IJ} \neq 0$)

$$\Rightarrow l_J \sim \underbrace{F_{JI} \cdot [e_{IJ}]_{\times}}_{\text{Epipolarlinienhomographie}} \cdot l_I$$

Epipolarlinienhomographie

Epipolarlinienhomographie

Ergebnis

Seien l_I und l_J korrespondierende Epipolarlinien und l eine Linie, die nicht durch den Epipol verläuft, so gilt:

$$l_J \sim \mathbf{F}_{JI} \cdot [l]_{\times} \cdot l_I$$

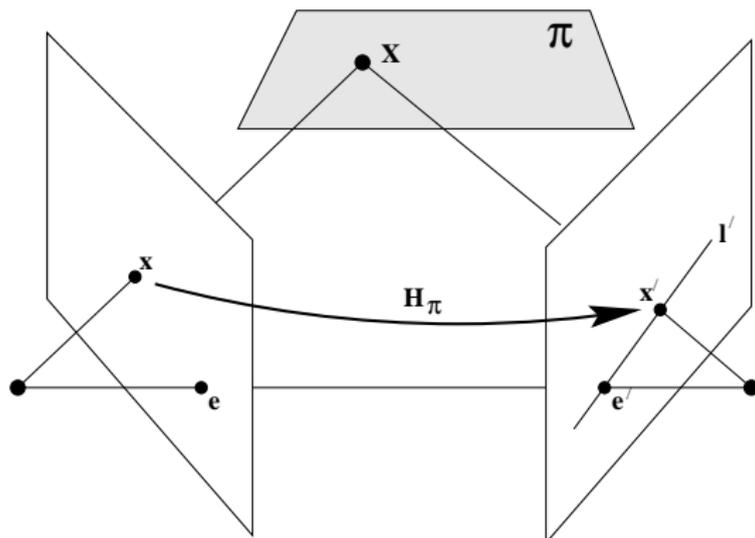
Insbesondere:

$$l_J \sim \mathbf{F}_{JI} \cdot [e_{IJ}]_{\times} \cdot l_I$$

Homographie infolge einer Ebene

Für die Fundamentalmatrix hatten wir hergeleitet:

$$F_{JI} \sim [e_{JI}]_{\times} \underbrace{P_J P_I^+}_{H_{JI}}$$



Statt \mathbf{H}_{JI} kann eine andere Homographie infolge einer beliebigen Ebene gewählt werden.

- Plückermatrix des Rückstrahls von \mathbf{x}_I (durch \mathbf{C}_I)

$$\mathbf{P}_I^+ \mathbf{x}_I \mathbf{C}_I^T - \mathbf{C}_I \mathbf{x}_I^T \mathbf{P}_I^{+T}$$

- Schnittpunkt des Rückstrahls mit der Ebene π

$$\mathbf{X} \sim (\mathbf{P}_I^+ \mathbf{x}_I \mathbf{C}_I^T - \mathbf{C}_I \mathbf{x}_I^T \mathbf{P}_I^{+T}) \pi$$

- Homographie zwischen \mathbf{x}_I und \mathbf{x}_J

$$\mathbf{x}_J \sim \mathbf{P}_J (\mathbf{P}_I^+ \mathbf{x}_I \mathbf{C}_I^T - \mathbf{C}_I \mathbf{x}_I^T \mathbf{P}_I^{+T}) \pi$$

Umformung mit $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}^T) \text{vec}(\mathbf{B})$ (vec: zeilenweises Stapeln)

$$\mathbf{x}_J \sim (\mathbf{P}_J \otimes \pi^T) ((\mathbf{P}_I^+ \otimes \mathbf{C}_I) \mathbf{x}_I - (\mathbf{C}_I \otimes \mathbf{P}_I^+) \mathbf{x}_I)$$

$$\mathbf{x}_J \sim \underbrace{(\mathbf{P}_J \otimes \pi^T) (\mathbf{P}_I^+ \otimes \mathbf{C}_I - \mathbf{C}_I \otimes \mathbf{P}_I^+)}_{\mathbf{H}_{JI}(\pi)} \mathbf{x}_I$$

$$\mathbf{H}_{JI}(\boldsymbol{\pi}) \sim \underbrace{(\mathbf{P}_J \otimes \boldsymbol{\pi}^T)}_{3 \times 16} \underbrace{(I_{4 \times 4} \otimes \mathbf{C}_I - \mathbf{C}_I \otimes I_{4 \times 4})}_{16 \times 4} \mathbf{P}_I^+$$

3×3

$$\mathbf{H}_{JI}(\boldsymbol{\pi}) \sim \mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^+ (\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{C}_I) - \mathbf{P}_J \mathbf{C}_I \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}_I^+$$

Rechenregeln

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T), \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1})$$

$$\mathbf{H}_{JI}(\boldsymbol{\pi}) \sim \mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^+ (\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{C}_I) - \underbrace{\mathbf{P}_J \mathbf{C}_I}_{\mathbf{e}_{JI}} \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}_I^T (\mathbf{P}_I \mathbf{P}_I^T)^{-1}$$

$$\text{Ist } \boldsymbol{\pi} \sim \mathbf{C}_I \Rightarrow \mathbf{H}_{JI}(\mathbf{C}_I) \sim \mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^+$$

$$\mathbf{H}_{JI}(\boldsymbol{\pi}) \mathbf{e}_{IJ} \sim \mathbf{e}_{JI} \quad \forall \boldsymbol{\pi}, \text{ da } [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{H}_{JI}(\boldsymbol{\pi}) \mathbf{e}_{IJ} = \mathbf{0}$$



Ergebnis

Angabe der Fundamentalmatrix über die Homographie infolge einer Ebene π :

$$\mathbf{F}_{JI} \sim [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{H}_{JI}(\pi)$$

Sei $\mathbf{C}_I = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$ (\mathbf{C}_I liegt im Ursprung des Weltkoordinatensystems)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}_I \sim \mathbf{K}_I [I, \mathbf{0}] \\ \mathbf{P}_J \sim \mathbf{K}_J \mathbf{R}_J [I, -\mathbf{c}_J] \end{array} \right\} \text{Kamerapaar}$$

Epipol: $\mathbf{e}_{JI} \sim \mathbf{P}_J \mathbf{C}_I \sim \mathbf{K}_J \mathbf{R}_J \mathbf{c}_J$

Pseudoinverse \mathbf{P}_I^+ : $\mathbf{P}_I^+ \sim (\mathbf{K}_I [I, \mathbf{0}])^+ = \begin{pmatrix} I \\ \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \mathbf{K}_I^{-1}$

Fundamentalmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{JI} &\sim [\mathbf{K}_J \mathbf{R}_J \mathbf{c}_J]_{\times} \overbrace{\mathbf{K}_J \mathbf{R}_J [I, -\mathbf{c}_J]}^I \begin{pmatrix} I \\ \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \mathbf{K}_I^{-1} \\ &\sim [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \underbrace{(\mathbf{K}_J \mathbf{R}_J \mathbf{K}_I^{-1})}_{\mathbf{H}_{JI}^{\infty}} \end{aligned}$$

Sonderfälle - Reine Translation

Reine Translation,
gleiche Kalibriermatrix

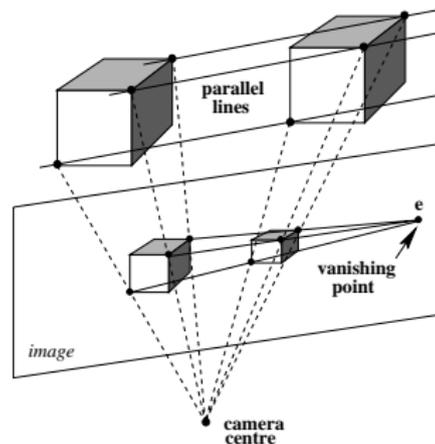
$$P_I = K [I | 0] \quad P_J = K [I | t]$$

$$(R = I \text{ und } K_I = K_J)$$

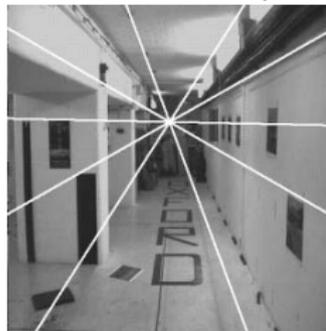
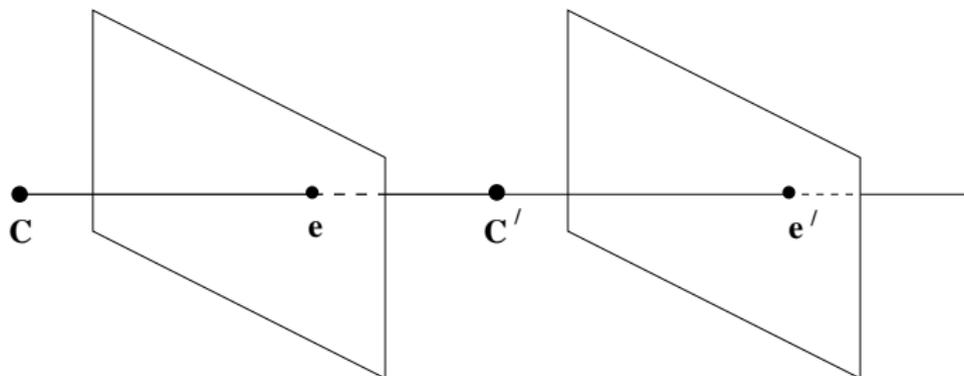
$$F_{JI} \sim [e_{JI}]_{\times} K K^{-1} \\ \sim [e_{JI}]_{\times}$$

Fokus of Expansion:

Der Epipol ist fix (gleiche Koordinaten auf beiden Bildern).



Reine Translation



Reine Translation parallel zur x-Achse

Ist die Translation parallel zur x-Achse: $\mathbf{e}_{JI} \sim (1 \ 0 \ 0)^T$

$$\mathbf{F} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Beziehung zwischen korrespondierenden Punkten $\mathbf{x}_J^T \mathbf{F} \mathbf{x}_I = 0$ reduziert sich ($y_I = y_J$).

Die Epipolarlinien sind korrespondierende Raster.

Bei der Rektifikation von Bildpaaren werden die Bilder so verändert, dass korrespondierende Punkte auf der gleichen y-Koordinate liegen.

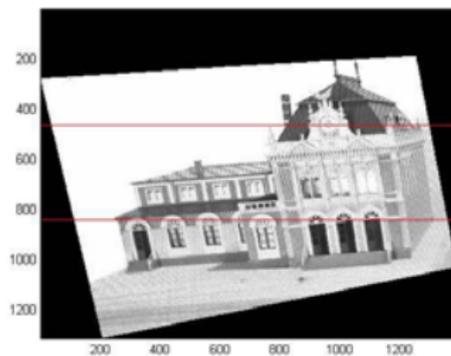
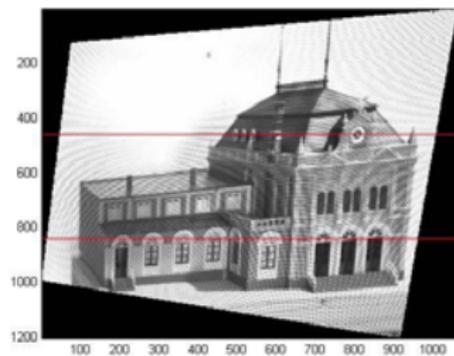


Abbildung: Rektifiziertes Bildpaar



Sonderfälle - Reine Rotation

Es existiert keine Epipolargeometrie.
Nur Mosaikbildung (Panoramabilder)!



Gliederung

8 Zwei-Bild Geometrie

Epipolargeometrie

Die Fundamentalmatrix

Korrelation

Schätzung der Fundamentalmatrix

Epipolarlinienhomographie

Homographie infolge einer Ebene

Sonderfälle

Geometrische Darstellung der Fundamentalmatrix



Geometrische Darstellung der Fundamentalmatrix

Definition (Horopter)

Ein Raumpunkt \mathbf{X} liegt auf dem Horopter, falls $\mathbf{P}_I \mathbf{X} \sim \mathbf{P}_J \mathbf{X} \sim \mathbf{x}$.

\mathbf{x} ist selbstkorrespondierend:

Der Weltpunkt \mathbf{X} wird von beiden Kameras auf den selben Bildpunkt \mathbf{x} abgebildet.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{F}_{JI} \mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{F}_{JI}^T \mathbf{x} = 0 \quad (\mathbf{F}_{JI}^T = \mathbf{F}_{IJ})$$

Es gilt:

$$\mathbf{x}^T \underbrace{(\mathbf{F}_{JI} + \mathbf{F}_{JI}^T)}_{\mathbf{F}_{JI}^s} \mathbf{x} = 0 \quad (2)$$

\mathbf{F}_{JI}^s ist der symmetrische Anteil der Fundamentalmatrix.

Zerlegung einer Matrix:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)}_{\text{symmetrisch}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{M} - \mathbf{M}^T)}_{\text{antisymmetrisch}}$$

Zerlegung der Fundamentalmatrix in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil:

$$\left. \begin{array}{l} \text{symmetrisch } \mathbf{F}_{JI}^s \sim \mathbf{F}_{JI} + \mathbf{F}_{JI}^T \\ \text{antisymmetrisch } \mathbf{F}_{JI}^a \sim \mathbf{F}_{JI} - \mathbf{F}_{JI}^T \end{array} \right\} \mathbf{F}_{JI} \sim \mathbf{F}_{JI}^s + \mathbf{F}_{JI}^a$$

\mathbf{F}_{JI}^s ist i.a. ein regulärer Kegelschnitt und beschreibt das Bild des Horopters.



Ergebnis

Die Epipole liegen auf dem Kegelschnitt, der durch \mathbf{F}_{JI}^s beschrieben wird.

Beweis.

$$\mathbf{e}_{JI}^T \mathbf{F}_{JI}^s \mathbf{e}_{JI} \sim \mathbf{e}_{JI}^T (\mathbf{F}_{JI} + \mathbf{F}_{JI}^T) \mathbf{e}_{JI} = 0$$

$$\mathbf{e}_{IJ}^T \mathbf{F}_{JI}^s \mathbf{e}_{IJ} \sim \mathbf{e}_{IJ}^T (\mathbf{F}_{IJ} + \mathbf{F}_{IJ}^T) \mathbf{e}_{IJ} = 0$$

Die Epipole sind der rechte bzw. der linke Nullvektor von \mathbf{F} :

$$\mathbf{e}_{JI}^T (\mathbf{F}_{JI} + \mathbf{F}_{JI}^T) \mathbf{e}_{JI} = \mathbf{e}_{JI}^T (\mathbf{F}_{JI} + \mathbf{F}_{IJ}) \mathbf{e}_{JI} = \underbrace{\mathbf{e}_{JI}^T \mathbf{F}_{JI} \mathbf{e}_{JI}}_{0^T} + \mathbf{e}_{JI}^T \underbrace{\mathbf{F}_{IJ} \mathbf{e}_{JI}}_0 = 0$$



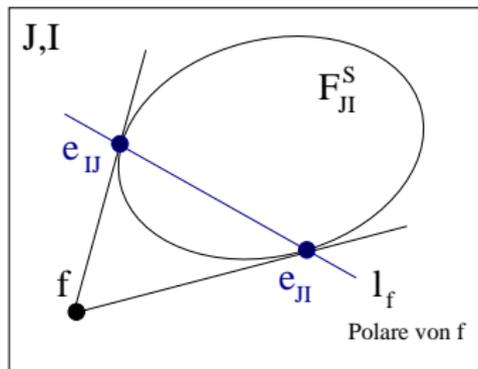


Abbildung: F_{II}^S . Die Polare des Punktes f schneidet den Kegelschnitt in den Epipolen e_{II} und e_{JI}



Der antisymmetrische Teil der Fundamentalmatrix

- \mathbf{F}_{JI}^a ist eine 3×3 schiefsymmetrische Matrix.
- \mathbf{F}_{JI}^a hat die Form eines Axiators:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{JI} - \mathbf{F}_{IJ}^T &\sim [\mathbf{f}]_{\times} \\ \Rightarrow (\mathbf{F}_{JI} - \mathbf{F}_{IJ}^T) \cdot \mathbf{f} &= 0\end{aligned}$$

- \mathbf{f} ist Nullvektor von $[\mathbf{f}]_{\times}$.

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{JI}\mathbf{f} \sim (\mathbf{F}_{JI}^s + \mathbf{F}_{JI}^a)\mathbf{f} \sim \mathbf{F}_{JI}^s\mathbf{f} \quad (3)$$

$\mathbf{F}_{JI}^s\mathbf{f} \sim \mathbf{l}_f$ ist die Polare des Punktes \mathbf{f} .



Ergebnis

Die Epipole liegen auf \mathbf{l}_f der Polaren zum Pol \mathbf{f} bzgl. \mathbf{F}_{JJ}^s .

Beweis.

$$\text{z.z. } \mathbf{e}_{JJ}^T \mathbf{F}_{JJ}^s \mathbf{f} = 0$$

$$\mathbf{F}_{JJ}^s \mathbf{f} \stackrel{(3)}{\sim} \mathbf{F}_{JJ} \mathbf{f} \text{ ist eine Linie durch den Epipol } \mathbf{e}_{JJ} \\ \Rightarrow \mathbf{e}_{JJ}^T \mathbf{F}_{JJ}^s \mathbf{f} = 0$$

$$\text{ähnlich für } \mathbf{e}_{IJ}^T \mathbf{F}_{JJ}^s \mathbf{f} = 0$$

