

Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung,
Universität Freiburg





Gliederung

8 Zwei-Bild Geometrie

- Projektive Invarianz und das kanonische Kamerapaar

 - Kanonisches Kamerapaar aus gegebener Fundamentalmatrix

 - Freiheitsgrade

 - Zusammenfassung

- 3D projektive Rekonstruktion

 - Berechnung der Fundamentalmatrix (2)

 - Affine Rekonstruktion

 - Metrische Rekonstruktion

 - Kruppa Gleichungen



Gliederung

8 Zwei-Bild Geometrie

Projektive Invarianz und das kanonische Kamerapaar

Kanonisches Kamerapaar aus gegebener Fundamentalmatrix

Freiheitsgrade

Zusammenfassung

3D projektive Rekonstruktion

Berechnung der Fundamentalmatrix (2)

Affine Rekonstruktion

Metrische Rekonstruktion

Kruppa Gleichungen



Projektive Invarianz und das kanonische Kamerapaar

Die Fundamentalmatrix \mathbf{F}_{JJ} ist invariant gegenüber einer Projektiven-Transformation des dreidimensionalen Raumes.

Genauer:

Ergebnis

Ist \mathbf{H} eine 4×4 -Matrix, die eine projektive Transformation des dreidimensionalen Raumes beschreibt, so sind die Fundamentalmatrizen der Kamerapaare $(\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J)$ und $(\mathbf{P}_I\mathbf{H}, \mathbf{P}_J\mathbf{H})$ gleich.

Projektive Invarianz und das kanonische Kamerapaar

Beweis.

F_{JJ} kann aus Bildkorrespondenzen berechnet werden.
Seien \mathbf{x}_I und \mathbf{x}_J korrespondierende Bildpunkte bzgl. des Kamerapaares $(\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J)$, d.h.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_I \sim \mathbf{P}_I \mathbf{X} \\ \mathbf{x}_J \sim \mathbf{P}_J \mathbf{X} \end{array} \right\} \text{für einen Raumpunkt } \mathbf{X}$$

wegen

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_I \sim (\mathbf{P}_I \mathbf{H})(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}) \\ \mathbf{x}_J \sim (\mathbf{P}_J \mathbf{H})(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}) \end{array} \right\} \text{sind } \mathbf{x}_I \text{ und } \mathbf{x}_J \text{ auch} \\ \text{korrespondierende Bildpunkte} \\ \text{bzgl. des Kamerasystems } (\mathbf{P}_I \mathbf{H}, \mathbf{P}_J \mathbf{H})$$



Das kanonische Kamerapaar

Kamerapaar $(\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J)$. Sei $\mathbf{H} = (\mathbf{P}_I^+, \mathbf{C}_I)$

Damit Bildung eines neuen (äquivalenten) Kamerapaars:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_I \mathbf{H} &= (I, \mathbf{0}) = \mathbf{P}'_I \\ \mathbf{P}_J \mathbf{H} &= (\mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^+, \underbrace{\mathbf{P}_J \mathbf{C}_I}_{\mathbf{e}_{JI}}) = \mathbf{P}'_J \end{aligned} \right\} \underbrace{[\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \underbrace{\mathbf{P}'_J \mathbf{P}'_I^+}_{\mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^+}}_{\mathbf{F}_{JI}} \mathbf{C}'_I \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}^T$$



Das kanonische Kamerapaar

Aus der Formel für die Fundamentalmatrix $\mathbf{F}_{JI} \sim [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^+$ folgt,

Ergebnis

Sei $\mathbf{P}_I \sim (I, \mathbf{0})$ und $\mathbf{P}_J \sim (\mathbf{M}, \mathbf{m})$ ein kanonisches Kamerapaar, so gilt

$$\mathbf{F}_{JI} \sim [\mathbf{m}]_{\times} \mathbf{M}.$$

- Das Kamerapaar legt die Fundamentalmatrix eindeutig fest.
- Die Umkehrung gilt nicht.
(Beziehung nicht bijektiv - „eins zu eins“)
- Hat man die Fundamentalmatrix bestimmt, so können die Kameramatrizen bis auf eine projektive Transformation bestimmt werden.

! Dies ist aber auch schon die gesamte Mehrdeutigkeit.

Es gilt folgende Umkehrung:

Satz

Sei \mathbf{F}_{JJ} Fundamentalmatrix für die Kamerapaare $\{\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J\}$ und $\{\mathbf{P}'_I, \mathbf{P}'_J\}$ gleichermaßen, dann existiert eine 4×4 Matrix \mathbf{H}_0 , so dass

$$\mathbf{P}'_I \sim \mathbf{P}_I \mathbf{H}_0$$

$$\mathbf{P}'_J \sim \mathbf{P}_J \mathbf{H}_0$$

Beweis (1)

Seien zwei Paare von Kameramatrizen $(\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J)$ und $(\mathbf{P}'_I, \mathbf{P}'_J)$ gegeben.

Man bringe beide Kamera-paare in die kanonische Form. Das geschieht durch projektive Transformationen. Danach gilt

$$\begin{array}{ll} \{\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J\} \rightarrow \mathbf{F}_{JI} & \{\mathbf{P}'_I, \mathbf{P}'_J\} \rightarrow \mathbf{F}_{JI} \\ \{\mathbf{P}_I \mathbf{H}, \mathbf{P}_J \mathbf{H}\} \rightarrow \mathbf{F}_{JI} & \{\mathbf{P}'_I \mathbf{H}', \mathbf{P}'_J \mathbf{H}'\} \rightarrow \mathbf{F}_{JI} \\ \{(I, \mathbf{0}), (\mathbf{A}, \mathbf{a})\} \rightarrow \mathbf{F}_{JI} & \{(I, \mathbf{0}), (\mathbf{B}, \mathbf{b})\} \rightarrow \mathbf{F}_{JI} \end{array}$$

$\mathbf{P}_J \mathbf{H} \sim (\mathbf{A}, \mathbf{a})$ und $\mathbf{P}'_J \mathbf{H}' \sim (\mathbf{B}, \mathbf{b})$. Da die Fundamentalmatrizen gleich sind, gilt:

$$\mathbf{F}_{JI} \sim [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{A} \sim [\mathbf{b}]_{\times} \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{a} \sim \mathbf{b}$$

\mathbf{F}_{JI} hat Rang 2, somit einen eindimensionalen linken Nullraum. Da sowohl \mathbf{a} als auch \mathbf{b} in diesem Nullraum liegen, gilt: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$.

Beweis (2)

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{Jl} \sim [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{A} = k[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{B}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{a}]_{\times} (\mathbf{A} - k\mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A} - k\mathbf{B}) = \mathbf{a}\mathbf{v}^T$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} \sim (\mathbf{A} - \mathbf{a}\mathbf{v}^T)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}'_j \mathbf{H}'} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{a} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}_j \mathbf{H}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^T & \mu \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}'_j \mathbf{H}'} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}_j \mathbf{H}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^T & \mu \end{pmatrix}$$

Beweis (3)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_J &\sim \mathbf{P}_J \mathbf{H} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^T & \mu \end{pmatrix} \mathbf{H}'^{-1} \\ \mathbf{P}'_I &\sim \mathbf{P}_I \underbrace{\mathbf{H} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^T & \mu \end{pmatrix} \mathbf{H}'^{-1}}_{\mathbf{H}_0} \end{aligned}$$

Die beiden Kamerapaare $\{\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J\}$ und $\{\mathbf{P}'_I, \mathbf{P}'_J\}$ mit gemeinsamer Fundamentalmatrix \mathbf{F}_{JI} stehen über eine projektive Transformation \mathbf{H}_0 in Beziehung. □

Kanonisches Kamerapaar aus gegebener Fundamentalmatrix

- 1 Eine Kamera (\mathbf{P}_J) im Unendlichen

$$\{\mathbf{P}_I \sim [I, \mathbf{0}], \quad \mathbf{P}_J \sim \underbrace{[[\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{F}_{JI}]_M, \underbrace{\mathbf{e}_{JI}]_m}\}$$

Repräsentant einer ganzen Äquivalenzklasse. Es gilt:

$$\mathbf{P}_J \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{JI} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{F}_{JI} &\sim [\mathbf{e}_{JI}]_{\times}^2 \mathbf{F}_{JI} \\ &\sim [\mathbf{e}_{JI} \mathbf{e}_{JI}^T - (\mathbf{e}_{JI}^T \mathbf{e}_{JI}) I]_{\times} \mathbf{F}_{JI} \sim \mathbf{F}_{JI} \end{aligned}$$

- 2 Für zwei endliche Kameras wähle

$$\{\mathbf{P}_I \sim [I, \mathbf{0}], \quad \mathbf{P}_J \sim [[\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{F}_{JI} + \mathbf{e}_{JI} \cdot \underbrace{\mathbf{v}^T}_{\mathbf{v} \text{ beliebig} \neq \mathbf{0}}, \mathbf{e}_{JI}]\}$$

Freiheitsgrade

Die beiden Kameramatrizen werden durch die Epipolargeometrie (\mathbf{F}_{JJ}) und durch die Raumhomographie festgelegt.

Freiheitsgrade	
22	Projektionsmatrizen \mathbf{P}_I und \mathbf{P}_J $2 \cdot (3 \times 4 - 1)$
-15	projektive Transformation \mathbf{H} $(4 \times 4 - 1)$
7	Fundamentalmatrix
15	Freiheitsgrade der projektiven Transformation \mathbf{H}
6	Bewegung im Raum (Rotation und Translation)
+1	Skalenfaktor (Puppenhaus oder normales Haus?)
7	Ähnlichkeitstransformation
8	Metrische Rekonstruktion
3	Lage der unendlich fernen Ebene.
+5	Absoluter Kegelschnitt oder sein Bild \leftrightarrow Kalibriermatrix



Zusammenfassung

- Fundamentalmatrizen der Kamerapaare $\{\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J\}$ und $\{\mathbf{P}_I \mathbf{H}, \mathbf{P}_J \mathbf{H}\}$ sind gleich.
- Umgekehrt: Falls die Fundamentalmatrizen der Kamerapaare $\{\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J\}$ und $\{\mathbf{P}'_I, \mathbf{P}'_J\}$ gleich sind, dann gilt

$$\exists \mathbf{H} : \mathbf{P}'_I \sim \mathbf{P}_I \mathbf{H} \text{ und } \mathbf{P}'_J \sim \mathbf{P}_J \mathbf{H}$$

- Kanonisches Kamerapaar bei gegebener Fundamentalmatrix:

$$\{\mathbf{P}_I \sim (I, \mathbf{0}), \quad \mathbf{P}_J \sim ([\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{F}_{JI} + \mathbf{e}_{JI} \cdot \underbrace{\mathbf{v}^T}_{\mathbf{v} \text{ beliebig}}, \mathbf{e}_{JI})\}$$



Gliederung

8 Zwei-Bild Geometrie

- Projektive Invarianz und das kanonische Kamerapaar

 - Kanonisches Kamerapaar aus gegebener Fundamentalmatrix

 - Freiheitsgrade

 - Zusammenfassung

- 3D projektive Rekonstruktion

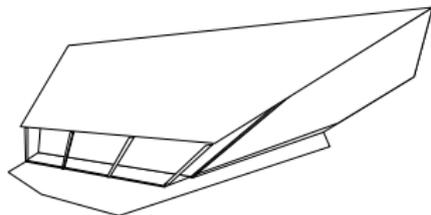
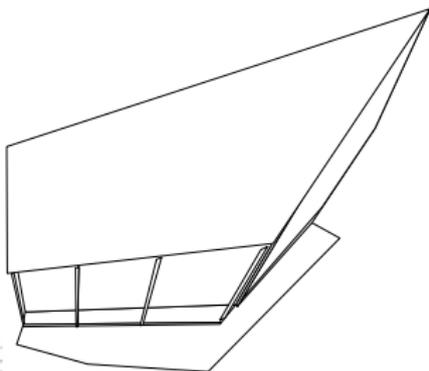
 - Berechnung der Fundamentalmatrix (2)

 - Affine Rekonstruktion

 - Metrische Rekonstruktion

 - Kruppa Gleichungen

3D projektive Rekonstruktion von Kamera und Szene

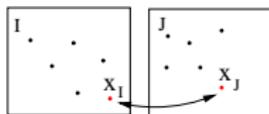


3D projektive Rekonstruktion von Kamera und Szene

Fundamentalmatrix \rightarrow Kameras \rightarrow Triangulation \rightarrow Szene

- Korrespondenzen $\mathbf{x}_I^i \leftrightarrow \mathbf{x}_J^i$

$$\mathbf{x}_I^i \sim \mathbf{P}_I \mathbf{X}^i, \quad \mathbf{x}_J^i \sim \mathbf{P}_J \mathbf{X}^i$$



- Schätzung der Fundamentalmatrix (mind. 7 Korrespondenzen)

$$\mathbf{x}_J^{iT} \mathbf{F}_{JI} \mathbf{x}_I^i = 0$$

- Mit Hilfe der Schätzung der Fundamentalmatrix Bestimmung weiterer Korrespondenzen (Genauigkeitserhöhung)
- Für jede gesicherte Bildpunktkorrespondenz:
Berechnung des Raumpunktes durch Triangulation
(Raumpunkte bis auf projektive Transformation \mathbf{H}^{-1})
- viele Varianten möglich (evtl. Zusatzinformation vorhanden)
Kamerakalibrierung, Bewegung der Kamera, a priori
Szeneninformation



Berechnung der Fundamentalmatrix

$$\mathbf{x}_j^T \mathbf{F}_{jl} \mathbf{x}_l = 0 \text{ oder } (\mathbf{x}_j^T \otimes \mathbf{x}_l^T) \text{vec}(\mathbf{F}) = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{x}_j^1 \otimes \mathbf{x}_l^1)^T \\ \dots \\ (\mathbf{x}_j^8 \otimes \mathbf{x}_l^8)^T \end{bmatrix}}_{(8 \times 9)} \text{vec}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$$

Bei n Korrespondenzen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}}_{n \times 9 \text{ Matrix}} \text{vec}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$$

Vorgehensweise

$$\mathbf{X}\mathbf{f} = 0 \quad \mathbf{f} = \text{vec}(\mathbf{F})$$

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\mathbf{f} = 0$$

Eigenwertzerlegung:

$$\mathbf{V} \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega \end{pmatrix} \mathbf{V}^T$$

$$\alpha \geq \beta \geq \dots \geq \omega \geq 0$$

\mathbf{f} letzte Spalte von \mathbf{V}

$$\text{SVD } \mathbf{X} \sim \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$



Berechnung der Fundamentalmatrix aus 6 Korrespondenzen

.. von denen vier aus koplanaren Punkten stammen.

$$\mathbf{x}_J^i \sim \mathbf{H}_{JJ} \mathbf{x}_I^i, \quad i = 1, \dots, 4$$

→ Berechnung von \mathbf{H}_{JJ} (Homographie infolge einer Raumebene).

$$\mathbf{x}_J^5 \times \mathbf{H}_{JJ} \mathbf{x}_I^5 \sim \lambda_J^5$$

$$\mathbf{x}_J^6 \times \mathbf{H}_{JJ} \mathbf{x}_I^6 \sim \lambda_J^6$$

da beide Punkte jeweils auf derselben Epipolarlinie liegen.

$$\lambda_J^5 \times \lambda_J^6 \sim \mathbf{e}_{JJ}$$

$$\mathbf{F}_{JJ} \sim [\mathbf{e}_{JJ}]_{\times} \mathbf{H}_{JJ}$$

$\mathbf{x}_J^i \leftrightarrow \mathbf{x}_I^i \Rightarrow$ Fundamentalmatrix \mathbf{F}_{JI}

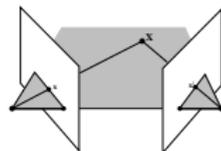
→ Epipole $\mathbf{e}_{JI}, \mathbf{e}_{IJ}$

→ Kanonisches Kamerapaar

$$\{\mathbf{P}_I \sim [I, \mathbf{0}], \quad \mathbf{P}_J \sim [[\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{F}_{JI} + \mathbf{e}_{JI} \underbrace{\mathbf{v}^T}_{\text{v beliebig}}, \mathbf{e}_{JI}]\}$$

→ Triangulation: Raumpunkte \mathbf{X}^i

→ Projektive Rekonstruktion bis auf \mathbf{H}

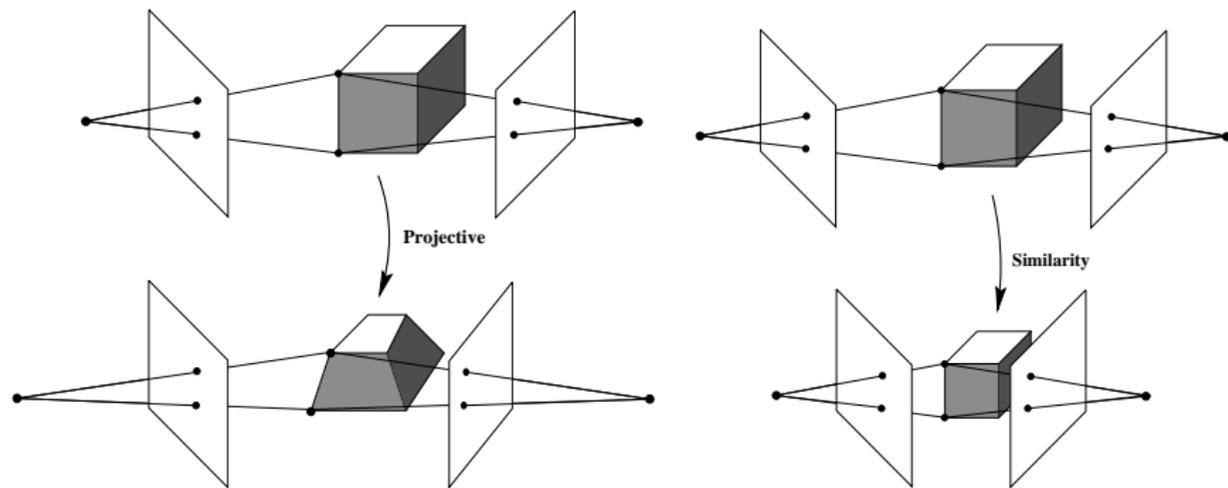


$$\{\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J, \mathbf{X}^i\}$$

Metrisch:

$$\{\mathbf{P}_I \mathbf{H}, \mathbf{P}_J \mathbf{H}, \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}^i\}$$

3D projektive und metrische Rekonstruktion





Verbleibende Freiheitsgrade

Freiheitsgrade	
15	Raumhomographie \mathbf{H} ($4 \times 4 - 1$)
-6	Lage und Orientierung
-1	Größe
8	Rest
-3	Lage der unendlich fernen Ebene π_∞
-5	Bild des absoluten Kegelschnittes ω (Kalibriermatrix)

Weg zur affinen Rekonstruktion

Nach Lokalisierung von π_∞ in der projektiven Rekonstruktion

$$\mathbf{X}_a^i \sim \underbrace{\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \pi_\infty^T & \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}_a^{-1}} \mathbf{X}^i$$

ist affine Rekonstruktion.

$$\pi_\infty^T \mathbf{X}^i = 0 \quad \forall \mathbf{X}^i \text{ auf } \pi_\infty$$

Affine Rekonstruktion

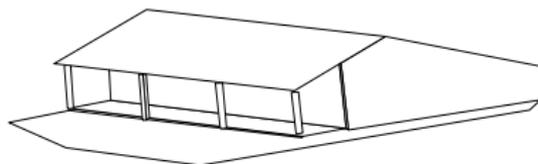
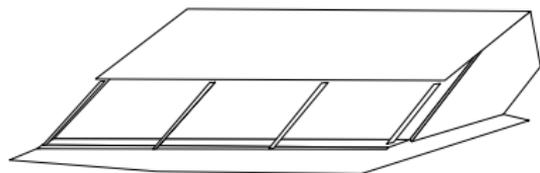


Abbildung: Affine Rekonstruktionen

Sonderfall: reine Kameratranslation

$$\mathbf{P}_I \sim \mathbf{K}(I, \mathbf{0}); \quad \mathbf{P}_J \sim \mathbf{K}(I, -\mathbf{c})$$

$$\mathbf{e}_{IJ} \sim \mathbf{e}_{JI} \sim \mathbf{Kc}$$

$$\mathbf{F}_{JI} \sim [\mathbf{e}_{JI}]_{\times}$$

gleiche korrespondierende Epipolarlinien

$$\begin{aligned} \lambda_J &\sim \mathbf{F}_{JI} \mathbf{x}_I \sim [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{x}_I \\ &\sim \mathbf{e}_{JI} \times \mathbf{x}_I \sim \underbrace{\mathbf{e}_{IJ} \times \mathbf{x}_I}_{\lambda_I} \end{aligned}$$

Sonderfall: reine Kameratranslation

Kanonisches Kamerapaar

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_I &\sim (I \quad \mathbf{0}); & \mathbf{P}_J &\sim ([\mathbf{e}_{JI}]_x^2 - \mathbf{e}_{JI}\mathbf{e}_{JI}^T, -\|\mathbf{e}_{JI}\|^2\mathbf{e}_{JI}) \\ & & &\sim (-\|\mathbf{e}_{JI}\|^2 I, -\|\mathbf{e}_{JI}\|^2\mathbf{e}_{JI}) \\ & & \mathbf{P}_J &\sim (I \quad \mathbf{e}_{JI}), \text{ da } \mathbf{F}_{JI} \sim [\mathbf{e}_{JI}]_x \\ \mathbf{X} &\sim \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_I \sim \mathbf{x}_J \sim \mathbf{K}\mathbf{x} \end{aligned}$$

Gleiche Bildpunkte müssen also auf der u.f.E. triangulieren.
Sie kann somit berechnet werden.



Sonderfall: reine Kameratranslation

Mit $\mathbf{P}_I \sim \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_J \sim \begin{pmatrix} I & \mathbf{e}_{JI} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x}_I \sim \mathbf{x}_J$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\sim \left[\begin{pmatrix} I \\ \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \mathbf{x}_I \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_I^T \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} I \\ \mathbf{e}_{JI}^T \end{pmatrix} [\mathbf{x}_I]_{\times} \mathbf{p} \\ &\sim \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die unendlich ferne Ebene liegt also schon richtig.

⇒ Es liegt eine affine Rekonstruktion vor.

$$\mathbf{X} \sim \underbrace{\left[\mathbf{P}_I^+ \mathbf{x}_I \mathbf{C}_I^T - \mathbf{C}_I \mathbf{x}_I^T \mathbf{P}_I^{+T} \right]}_{\text{Plückermatrix des Rückstrahls}} \mathbf{P}_J^T \mathbf{l}_J, \quad \mathbf{P}_J^T [\mathbf{x}_J]_{\times} \mathbf{p} = \pi$$

Die Ebene ist parallel zum Rückstrahl.
Beide treffen sich im Unendlichen.



Sonderfall: reine Kameratranslation

Ergebnis (Reine Translation)

Bei einer reinen Kameratranslation ohne Änderung der internen Kameraparameter und ohne Rotation gilt $\mathbf{F} \sim [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \sim [\mathbf{e}_{IJ}]_{\times}$.
Zur affinen Rekonstruktion können die beiden Kameras $\mathbf{P}_{IJ} \sim [I | \mathbf{0}]$ und $\mathbf{P}_J \sim [I | \mathbf{e}_{JI}]$ gewählt werden.

Metrische Rekonstruktion

.. wird erreicht durch eine affine Transformation nach der affinen Rekonstruktion (damit die u.f.E. erhalten bleibt), welche den absoluten Kegelschnitt in Normalform bringt.

$$\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} \sim (\mathbf{M} \quad \mathbf{m}), \quad \mathbf{PH} \sim (\mathbf{MA} \quad \mathbf{m})$$

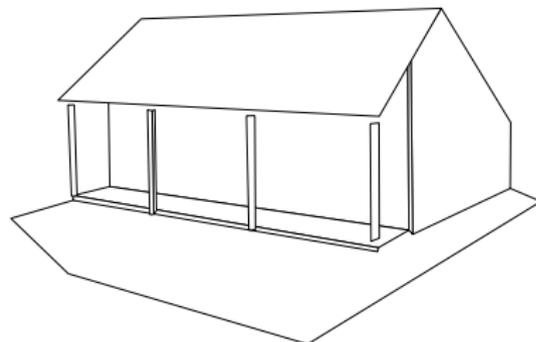
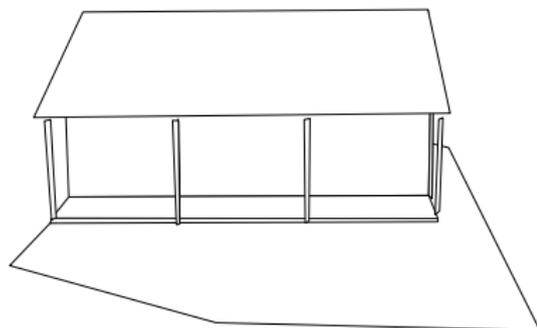
→ Endgültige (metrische) Rekonstruktion: $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}_a^i$

$$\omega^* \sim \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^T$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T \sim \mathbf{M}^{-1}\omega^*\mathbf{M}^{-T} \sim (\mathbf{M}^T\omega\mathbf{M})^{-1}$$

ω muss bekannt sein. $\omega \sim (\mathbf{K}\mathbf{K}^T)^{-1} \leftrightarrow$ Kalibriermatrix

Metrische Rekonstruktion



Bedingungen zur Berechnung von ω bei konstanter Kalibriermatrix (bewegte Kamera).

$$\mathbf{P}_I \sim \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}_J \sim \mathbf{K}\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

Punkte im Unendlichen: $\mathbf{X} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T & 0 \end{pmatrix}^T$

$$\mathbf{x}_I \sim \mathbf{P}_I \mathbf{X} \sim \mathbf{K}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}_J \sim \mathbf{P}_J \mathbf{X} \sim \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}_J \sim \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}}_{\mathbf{H}_{JI}^\infty} \mathbf{x}_I$$

$$\mathbf{H}_{JI}^\infty \sim \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{H}_{JI}^\infty \mathbf{K} \sim \mathbf{K}\mathbf{R}$$

Elimination von \mathbf{R}

$$\Rightarrow \mathbf{H}_{JI}^\infty \overbrace{\mathbf{K}\mathbf{K}^T}^{\omega^*} \mathbf{H}_{JI}^{\infty T} \sim \mathbf{K}\mathbf{K}^T$$

Elimination von R

$$\mathbf{H}_{Jl}^{\infty} \overbrace{\mathbf{K}\mathbf{K}^T}^{\omega^*} \mathbf{H}_{Jl}^{\infty T} = \mathbf{K}\mathbf{K}^T$$

nach Normierung mit der Determinante! $\det(\mathbf{H}_{Jl}^{\infty}) = 1$

Bei bekannter Homographie \mathbf{H}_{Jl}^{∞} stellt dies eine Matrix-Gleichung für $\omega^*(\mathbf{K})$ dar.

Reicht sie aus? Leider Nein.

$$\underbrace{(\mathbf{H}_{Jl}^{\infty} \otimes \mathbf{H}_{Jl}^{\infty})}_{9 \times 9} \underbrace{\text{vec}(\mathbf{K}\mathbf{K}^T)}_k = \underbrace{\text{vec}(\mathbf{K}\mathbf{K}^T)}_k \quad \text{Eigenwertproblem}$$
$$\underbrace{\mathbf{H}_{Jl}^{\infty(2)}}_{6 \times 6} \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}$$



EW von \mathbf{R}_J : $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$

... von \mathbf{H}_{JJ}^∞ $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$

... von $\mathbf{H}_{JJ}^{\infty(2)}$ $\{e^{i2\theta}, 1, e^{i\theta}, e^{-i2\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$

Doppelter Eigenwert 1

- $\Rightarrow \kappa$ liegt in einem 2-dimensionalen Eigenraum.
- \Rightarrow Die Gleichung ist nicht ausreichend zur eindeutigen Berechnung von κ .

In der Tat: mit \mathbf{a} Rotationsachse von \mathbf{R} folgt aus

$$\mathbf{H}_{Jl}^{\infty} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{R}$$

$$\mathbf{H}_{Jl}^{\infty} \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{K} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{H}_{Jl}^{\infty} \underbrace{(\mathbf{K} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{K}^T)}_{\text{Rang 1}} \mathbf{H}_{Jl}^{\infty T} = \mathbf{K} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{K}^T$$

\Rightarrow sowohl $\mathbf{K} \mathbf{K}^T$, als auch $\mathbf{K} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{K}^T$ sind Lösungen von $\mathbf{H}_{Jl}^{\infty} \mathbf{X} \mathbf{H}_{Jl}^{\infty T} = \mathbf{X}$ mit \mathbf{X} symmetrisch

\Rightarrow jede Linearkombination von $\mathbf{K} \mathbf{K}^T$ und $\mathbf{K} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{K}^T$ löst auch obige Gleichung.

Lsg Mit einem zweiten Bildpaar (oder einem dritten Bild) lässt sich die Mehrdeutigkeit beheben. (Selbstkalibrierung mit Hilfe der u.f.Ebene)

Die Kruppa Gleichungen

$$\text{Aus } \mathbf{H}_{JI}^\infty \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{H}_{JI}^{\infty T} \sim \boldsymbol{\omega}^*$$

$$\Rightarrow [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \mathbf{H}_{JI}^\infty \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{H}_{JI}^{\infty T} [\mathbf{e}_{JI}]_{\times}^T \sim [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \boldsymbol{\omega}^* [\mathbf{e}_{JI}]_{\times}^T$$

Ergebnis (Kruppa-Gleichungen)

$$\mathbf{F}_{JI} \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{F}_{JI}^T \sim [\mathbf{e}_{JI}]_{\times} \boldsymbol{\omega}^* [\mathbf{e}_{JI}]_{\times}^T$$

Normierung mit der Determinante jetzt nicht mehr möglich, da sie Null ist!

F enthält auch metrische Information! Zwei skalare Gleichungen pro Fundamentalmatrix (\rightarrow Polynom 12.-ten Grades in einer

Variablen bei drei Fundamentalmatrizen)

Die Kruppa Gleichungen

