Computer Vision I

Nikos Canterakis

Lehrstuhl für Mustererkennung
Universität Freiburg

Gliederung

Bildebenenhomographie

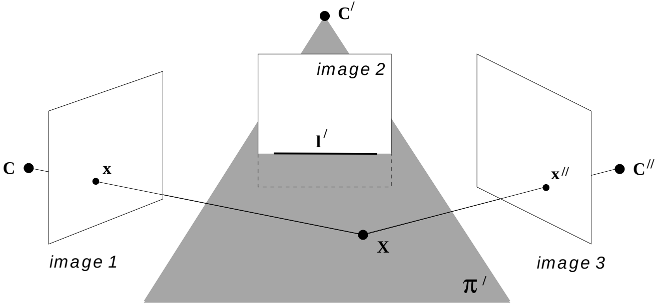
Bildebenenhomographie $\mathbf{H}_{JI}(\boldsymbol{\pi})$ infolge einer Ebene $\boldsymbol{\pi}$

$$\mathbf{x}_J \sim \mathbf{H}_{JI}(\boldsymbol{\pi})\mathbf{x}_I$$
$$\mathbf{x}_J \sim (\mathbf{P}_J \otimes \boldsymbol{\pi}^T)(\mathbf{P}_I^+ \otimes \mathbf{C}_I - \mathbf{C}_I \otimes \mathbf{P}_I^+)\mathbf{x}_I$$

Ist $\boldsymbol{\pi}$ bekannt als Rückprojektion einer Bildlinie $\mathbf{l}_K$ auf einer dritten Bildebene K mit Kameramatrix $\mathbf{P}_K$, dann gilt $\boldsymbol{\pi} \sim \mathbf{P}_K^T \mathbf{l}_K$.
Eingesetzt:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_J &\sim (\mathbf{P}_J \otimes \mathbf{l}_K^T \mathbf{P}_K)(\mathbf{P}_I^+ \otimes \mathbf{C}_I - \mathbf{C}_I \otimes \mathbf{P}_I^+)\mathbf{x}_I \\ &\sim \underbrace{\underbrace{(I_3 \otimes \mathbf{l}_K^T)}_{3\times 9} \underbrace{(\mathbf{P}_J \otimes \mathbf{P}_K)(I_4 \otimes \mathbf{C}_I - \mathbf{C}_I \otimes I_4)\mathbf{P}_I^+}_{\mathbf{T}_I^{JK} \text{ Trifokaltensor } 9\times 3}}_{H_{JI}(\mathbf{P}_K^T \mathbf{l}_K)} \mathbf{x}_I\end{aligned}$$

Bildebenehomographie



Gliederung

Trifokaltensor

- $\mathbf{T}_I^{JK}$ nennt man Trifokalsensor (erscheint hier als 9×3 Matrix).
- Er beschreibt die gesamte Epipolargeometrie zwischen allen drei Kameras.
- Ähnlich wie bei der Fundamentalmatrix ist der Tensor eine projektive Größe, d.h. die Kameratripel $\{\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J, \mathbf{P}_K\}$ und $\{\mathbf{P}_I\mathbf{H}, \mathbf{P}_J\mathbf{H}, \mathbf{P}_K\mathbf{H}\}$ erzeugen den gleichen Tensor.
- Die Umkehrung gilt hier auch wie im Fall von zwei Bildern: Kennt man $\mathbf{T}$, so kann man daraus alle Fundamentalmatrizen sowie auch ein kanonisches Kameratripel berechnen.

Trifokaltensor

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_I^{JK} &\sim (\mathbf{P}_J \otimes \mathbf{P}_K)(\mathbf{P}_I^{+} \otimes \mathbf{C}_I - \mathbf{C}_I \otimes \mathbf{P}_I^{+}) \\
&\sim (\mathbf{P}_J \mathbf{P}_I^{+} \otimes \mathbf{P}_K \mathbf{C}_I - \mathbf{P}_J \mathbf{C}_I \otimes \mathbf{P}_K \mathbf{P}_I^{+})
\end{aligned}
$$

Vorsicht mit Skalenfaktoren

$$
\begin{aligned}
&\sim \mathbf{H}_{JI}(\mathbf{C}_I) \otimes \mathbf{e}_{KI} - \mathbf{e}_{JI} \otimes \mathbf{H}_{KI}(\mathbf{C}_I) \\
&\sim \mathbf{H}_{JI}(\pi) \otimes \mathbf{e}_{KI} - \mathbf{e}_{JI} \otimes \mathbf{H}_{KI}(\pi) \\
&\sim \mathbf{A}_J \otimes \mathbf{e}_{KI} - \mathbf{e}_{JI} \otimes \mathbf{A}_K
\end{aligned}
$$

Transfer / Homographie

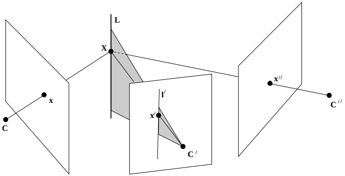
$$
\mathbf{x}_J \sim \underbrace{(I_3 \otimes \mathbf{l}_K^T)\mathbf{T}_I^{JK}}_{\mathbf{H}_{JI}(\mathbf{P}_K^T \mathbf{l}_K)} \mathbf{x}_I \sim \{\mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I\}_{3\times 3} \mathbf{l}_K
$$

Berechnung

Zur Berechnung von $\mathbf{T}_I^{JK}$ lassen sich auch Linienkorrepsondenzen heranziehen.

Punkt-Punkt-Linie
(2 skalare Gleichungen)

$$\mathbf{x}_J \sim (I_3 \otimes \mathbf{l}_K^T)\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{x}_I$$
$$\sim \left\{\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3}\mathbf{l}_k$$



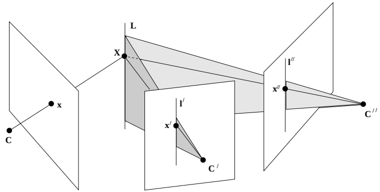
Notation

$$\operatorname{vec}\left(\left\{\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3}\right) = \mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{x}_I$$

Punkt - Linie - Linie

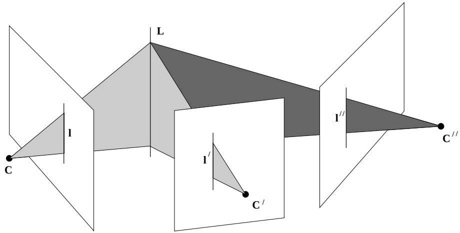
$$\mathbf{l}_J^T \left\{ \mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I \right\}_{3\times 3} \mathbf{l}_k = 0$$

$$(\mathbf{l}_J^T \otimes \mathbf{l}_K^T)\mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I = 0$$



- Eine skalare Gleichung
- $\mathbf{l}_J$ und $\mathbf{l}_k$ brauchen nicht zu korrespondieren, müssen aber durch korrespondierende Punkte gehen.

Linie - Linie - Linie



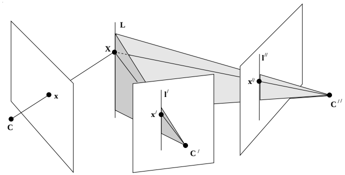
$$\mathbf{l}_I^T \sim \left(\mathbf{l}_J^T \otimes \mathbf{l}_K^T\right) \mathbf{T}_I^{JK}$$

- 2 skalare Gleichungen
- hier korrespondieren $\mathbf{l}_I$, $\mathbf{l}_J$ und $\mathbf{l}_K$

Punkt - Punkt - Punkt

$$\left([\mathbf{x}_J]_\times \otimes [\mathbf{x}_K]_\times\right) \mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I = \mathbf{0}$$

$$[\mathbf{x}_J]_\times \left\{\mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3} [\mathbf{x}_k]_\times = \mathbf{0}$$



- 9 Trilinearitäten
- 4 skalare Gleichungen

Anmerkung: $\text{rang}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{rang}(\mathbf{A}) \cdot \text{rang}(\mathbf{B})$ gilt immer

Gliederung

Tensoren erster Stufe

Vektoren sind Tensoren erster Stufe

- Konventionen:
  $\mathbf{x}$ x^i kontravarianter Tensor
  $\mathbf{l}$ l_i kovarianter Tensor
- Einstein Konvention:
  $x^i l_i = \mathbf{x}^T \mathbf{l} = \sum_i x^i l_i$

Tensoren zweiter Stufe

Matrizen sind Tensoren zweiter Stufe

$$\mathbf{A}, \quad A^i_j, \quad \mathbf{Ax}, \quad A^i_j x^j = (\mathbf{Ax})^i$$

Die Fundamentalmatrix ist zweifach kovariant

$$F_{ij} x^j = l_i$$

Tensoren dritter Stufe

Der Trifokaltensor ist ein Tensor dritter Stufe (3-fach indiziert)
T_i^{jk} Tensorelemente

- Indizes oben: kontravariant
- Indizes unten: kovariant
- zweifach kontravariant, einfach kovariant

$$T_i^{jk} x^i l_k = x^j \qquad \text{vgl.} \left\{ \mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I \right\}_{3\times 3} \mathbf{l}_K = \mathbf{x}_J$$

$$x^i T_i^{jk} l_k = x^j \qquad \text{Reihenfolge spielt keine Rolle}$$

$$l_j T_i^{jk} x^i l_k = 0 \qquad \text{vgl.} \left(\mathbf{l}_J^T \otimes \mathbf{l}_K^T \right) \mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I = 0$$

Levi-Civita Tensor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } ijk \text{ gerade Permutation von 123} \\ -1, & \text{wenn } ijk \text{ ungerade Permutation von 123} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\epsilon_{ijk} a^j b^k = c_i \qquad \text{vgl. } \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Gliederung

Freiheitsgrade

27 homogene, 26 inhomogene Elemente

3 Kameras:

$$33 \begin{cases} \mathbf{P}_I : & 11 \\ \mathbf{P}_J : & 11 \\ \mathbf{P}_K : & 11 \end{cases}$$

$$33 \begin{cases} \mathbf{H} : & 15 \\ \mathbf{T} : & 18 \end{cases}$$

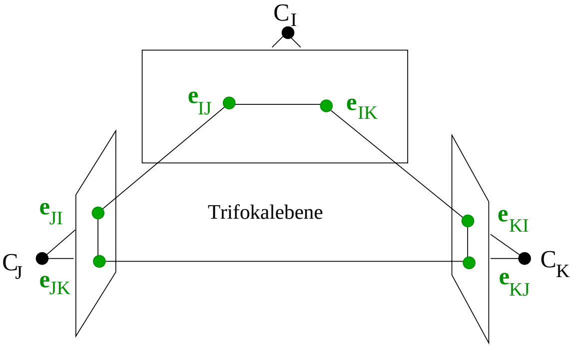
2 Kameras:

$$22 \begin{cases} \mathbf{P}_I : & 11 \\ \mathbf{P}_J : & 11 \end{cases}$$

$$22 \begin{cases} \mathbf{H} : & 15 \\ \mathbf{F} : & 7 \end{cases}$$

Die Tensorelemente müssen $26 - 18 = 8$ unabhängige nichtlineare Bedingungen erfüllen. Bei der Fundamentalmatrix ergab diese Berechnung $8 - 7 = 1$, nämlich $\det(\mathbf{F}) = 0$.

Trifokalebene



$$\text{Epipolarebene} \begin{cases} \mathbf{e}_{JK}^T \mathbf{F}_{JI} \mathbf{e}_{IK} = 0 \\ \mathbf{e}_{KJ}^T \mathbf{F}_{KI} \mathbf{e}_{IJ} = 0 \\ \mathbf{e}_{KI}^T \mathbf{F}_{KJ} \mathbf{e}_{JI} = 0 \end{cases}$$

Zur (Nicht-) Äquivalenz zwischen Trifokaltensor und Fundamentalmatrizen

- Transfer mit dem Tensor

$$\mathbf{x}_J \sim \left(I_3 \otimes \mathbf{l}_K^T\right) \mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I = \left\{\mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3} \mathbf{l}_K$$

- Transfer mit den Fundamentalmatrizen

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_K &\sim [\mathbf{l}_K]_\times \mathbf{F}_{KI} \mathbf{x}_I \\
\mathbf{x}_J &\sim (\mathbf{F}_{JI} \mathbf{x}_I) \times (\mathbf{F}_{JK} \mathbf{x}_K) \\
\mathbf{x}_J &\sim [\mathbf{F}_{JI} \mathbf{x}_I]_\times \mathbf{F}_{JK} [\mathbf{l}_K]_\times \mathbf{F}_{KI} \mathbf{x}_I
\end{aligned}$$

Funktioniert nicht für Punkte auf der Trifokalebene (oder in der Nähe). Man kann trotzdem eine Formel angeben, die den Tensor aus den Fundamentalmatrizen berechnet!

Berechnung von $\mathbf{T}_I^{KJ}$ aus $\mathbf{T}_I^{JK}$

$$\mathbf{l}_J^T \left\{\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3} \mathbf{l}_K = 0$$

$$\mathbf{l}_K^T \left\{\mathbf{T}_I^{KJ}\mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3} \mathbf{l}_J = 0$$

$$\mathbf{l}_K^T \left\{\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3}^T \mathbf{l}_J = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\mathbf{T}_I^{KJ}\mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3} = \left\{\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3}^T \quad \forall \quad \mathbf{x}_I$$

$$\mathbf{T}_I^{JK} \quad : \quad (9\times 3)\,, \quad \mathbf{x}_I \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{T}_I^{KJ}$ entsteht aus $\mathbf{T}_I^{JK}$ durch Transponieren der Spalten.

Gliederung

$$\mathbf{T}_I^{JK} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{r} & \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix}$$

$$\{\mathbf{q}\}_{3\times 3} =: \mathbf{Q} \qquad \{\mathbf{r}\}_{3\times 3} =: \mathbf{R} \qquad \{\mathbf{s}\}_{3\times 3} =: \mathbf{S}$$

$$\operatorname{vec}(\mathbf{Q}) = \mathbf{q} \qquad \operatorname{vec}(\mathbf{R}) = \mathbf{r} \qquad \operatorname{vec}(\mathbf{S}) = \mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q}_I^{KJ} = \left(\mathbf{Q}_I^{JK}\right)^T \qquad \mathbf{R}_I^{KJ} = \left(\mathbf{R}_I^{JK}\right)^T \qquad \mathbf{S}_I^{KJ} = \left(\mathbf{S}_I^{JK}\right)^T$$

Die Korrelationsscheiben $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ und $\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_J &\sim \left\{\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{x}_I\right\}_{3\times3}\mathbf{l}_K \\ &\sim \left(x_I^1\mathbf{Q} + x_I^2\mathbf{R} + x_I^3\mathbf{S}\right)\mathbf{l}_K\end{aligned}$$

Sei $\mathbf{x}_I$ festgehalten, dann liegt $\mathbf{x}_J$ auf $\mathbf{F}_{JI}\mathbf{x}_I \sim \boldsymbol{\lambda}_{JI}\ \forall\ \mathbf{l}_K \Rightarrow$ Jede Linearkombination von $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$ ergibt eine Rang 2 singuläre Matrix.

Linksnullvektor: $\boldsymbol{\lambda}_{JI}$ Epipolarlinie.
Alle Linksnullvektoren aller Korrelationen $\left\{\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{x}_I\right\}_{3\times3}$ spannen nur einen zweidimensionalen Raum auf.

Rechtsnullvektor: $\boldsymbol{\lambda}_{KI}$ Epipolarlinie.

Bedingungen an den Trifokaltensor

Satz

27 Zahlen angeordnet in $\begin{pmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{r} & \mathbf{s} \end{pmatrix}$ *stellen einen Trifokaltensor dar, falls:*

- *alle Linearkombinationen von* $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ *und* $\mathbf{S}$ *sind singulär.*
- *alle Rechtsnullvektoren von allen Linearkombinationen von* $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ *und* $\mathbf{S}$ *spannen nur einen zweidimensionalen Unterraum auf.*
- *alle Linksnullvektoren von allen Linearkombinationen von* $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ *und* $\mathbf{S}$ *spannen nur einen zweidimensionalen Unterraum auf.*

Die Linksnullvektoren sind Epipolarlinien $\boldsymbol{\lambda}_{JI}$ *und schneiden sich deshalb im Epipol* $\mathbf{e}_{JI}$ *(*$\rightarrow$ *Berechnung von* $\mathbf{e}_{JI}$*).*
Die Rechtsnullvektoren sind Epipolarlinien $\boldsymbol{\lambda}_{KI}$ *und schneiden sich deshalb im Epipol* $\mathbf{e}_{KI}$ *(*$\rightarrow$ *Berechnung von* $\mathbf{e}_{KI}$*).*
$\Rightarrow$ *12 Bedingungen (nicht unabhängig)*

Die Homographiescheiben $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ (planare Homologien)

$$0 = \mathbf{l}_J^T \left\{ \mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I \right\}_{3\times3} \mathbf{l}_K$$

$$\mathbf{x}_J \sim \underbrace{\left(I_3 \otimes \mathbf{l}_K^T \right) \mathbf{T}_I^{JK}}_{\mathbf{H}_{JI}(\mathbf{P}_K^T \mathbf{l}_K)} \mathbf{x}_I \text{ oder}$$

$$\mathbf{x}_K^T \sim \mathbf{l}_J^T \left\{ \mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I \right\}_{3\times3} \Rightarrow \mathbf{x}_K \sim \underbrace{\left(\mathbf{l}_J^T \otimes I_3 \right) \mathbf{T}_I^{JK}}_{\mathbf{H}_{KI}(\mathbf{P}_J^T \mathbf{l}_J)} \mathbf{x}_I$$

$$\mathbf{x}_K \sim \left(l_J^1 \mathbf{U} + l_J^2 \mathbf{V} + l_J^3 \mathbf{W} \right) \mathbf{x}_I$$

Homographiescheiben und Epipole

$$\mathbf{U} \sim \mathbf{H}_{KI} \overbrace{\left(\mathbf{P}_J^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}^{\boldsymbol{\pi}_1}$$

$$\mathbf{V} \sim \mathbf{H}_{KI} \overbrace{\left(\mathbf{P}_J^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}^{\boldsymbol{\pi}_2}$$

$$\mathbf{W} \sim \mathbf{H}_{KI} \overbrace{\left(\mathbf{P}_J^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}^{\boldsymbol{\pi}_3}$$

Homographien zwischen Bildebenen infolge einer Raumebene bilden immer die Epipole aufeinander ab.

$$\Rightarrow \mathbf{U}\mathbf{e}_{IK} \sim \mathbf{V}\mathbf{e}_{IK} \sim \mathbf{W}\mathbf{e}_{IK} \sim \mathbf{e}_{KI}$$

Genauer:

$$\left\{\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{e}_{IK}\right\}_{3\times 3} \sim \begin{pmatrix} (\mathbf{U}\mathbf{e}_{IK})^T \\ (\mathbf{V}\mathbf{e}_{IK})^T \\ (\mathbf{W}\mathbf{e}_{IK})^T \end{pmatrix} \sim \mathbf{e}_{JK}\mathbf{e}_{KI}^T$$

$$\begin{aligned} e_{JK}^2 \mathbf{U}\mathbf{e}_{IK} &= e_{JK}^1 \mathbf{V}\mathbf{e}_{IK} \\ e_{JK}^3 \mathbf{V}\mathbf{e}_{IK} &= e_{JK}^2 \mathbf{W}\mathbf{e}_{IK} \\ e_{JK}^1 \mathbf{W}\mathbf{e}_{IK} &= e_{JK}^3 \mathbf{U}\mathbf{e}_{IK} \end{aligned}$$

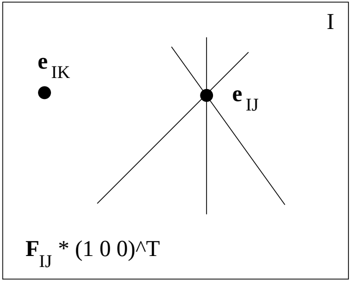
$$\mathbf{L}_{23} \sim \boldsymbol{\pi}_2 \cap \boldsymbol{\pi}_3 \sim \left[\mathbf{P}_J^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{C}_J^T - \mathbf{C}_J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}_J^{+T} \right]$$

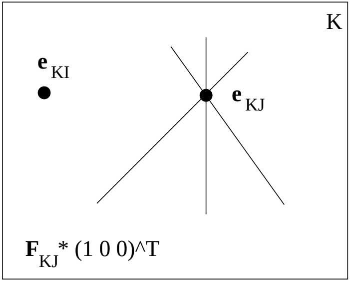
Bild von $\mathbf{L}_{23}$ auf I: $\mathbf{F}_{IJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bild von $\mathbf{L}_{23}$ auf K: $\mathbf{F}_{KJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkte von $\mathbf{F}_{IJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ werden durch $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ auf den gleichen Punkt von $\mathbf{F}_{KJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ abgebildet.

Skizze


I
$\mathbf{e}_{IK}$
$\mathbf{e}_{IJ}$
$\mathbf{F}_{IJ}$ * (1 0 0)^T


K
$\mathbf{e}_{KI}$
$\mathbf{e}_{KJ}$
$\mathbf{F}_{KJ}$* (1 0 0)^T

Trifokaltensor, Eigenraum, planare Homologie

$$\mathbf{V}\mathbf{e}_{IK} \sim \mathbf{W}\mathbf{e}_{IK} \sim \mathbf{e}_{KI}, \quad \mathbf{V}\mathbf{x}_I \sim \mathbf{W}\mathbf{x}_I \quad \forall\, \mathbf{x}_I \text{ auf } \mathbf{F}_{IJ}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{e}_{IK} \sim \mathbf{e}_{IK}$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{x}_I \sim \mathbf{x}_I \quad \forall\, \mathbf{x}_I \text{ auf } \mathbf{F}_{IJ}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{W}$ besitzt 2D Eigenraum $\rightarrow$ planare Homologie

Achse: $\mathbf{F}_{IJ}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Bedingungen an den Trifokaltensor

Satz

Drei 3×3 Matrizen $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ bilden bei der Anordnung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} \sim \mathbf{T}$$

einen Trifokaltensor, genau dann, wenn die Eigenräume von Paaren folgendermaßen aussehen:

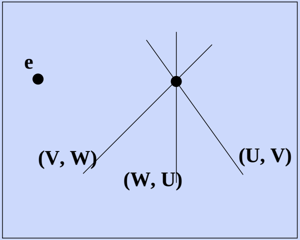
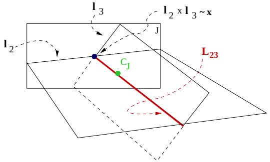


Abbildung: $\Rightarrow$ 8 Bedingungen

Schnittgerade zwischen

$\underbrace{\mathbf{P}_J^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T}_{\pi_2}$ und $\underbrace{\mathbf{P}_J^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T}_{\pi_3}$:

(gehen beide durch $\mathbf{C}_J$)



$$\mathbf{L}_{23}^* \sim \mathbf{P}_J^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}_J - \mathbf{P}_J^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}_J$$

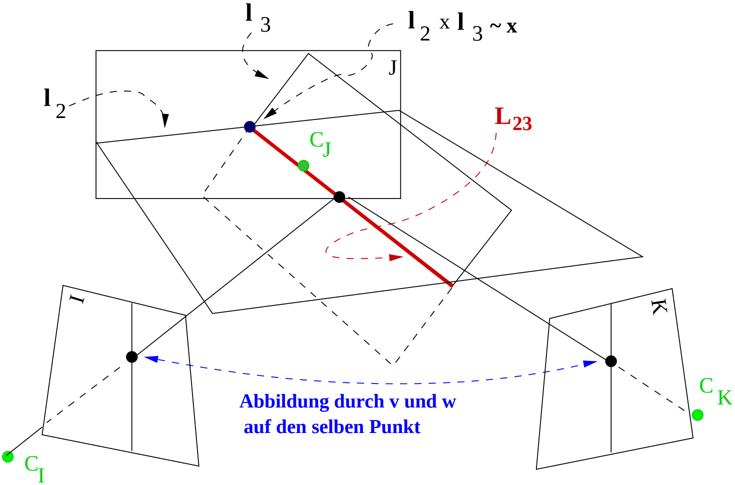
$$= \mathbf{P}_J^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}_J$$

$$\mathbf{L}_{23} \sim \mathbf{P}_J^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{C}_J^T - \mathbf{C}_J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}_J^{+T}$$

- Bild von $\mathbf{L}_{23}$ auf I: $\mathbf{F}_{IJ}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
- Bild von $\mathbf{L}_{23}$ auf K: $\mathbf{F}_{KJ}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Punkte von $\mathbf{F}_{IJ}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ werden von $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ auf den gleichen Punkt von $\mathbf{F}_{KJ}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ abgebildet.

Skizze


l 3
l 2 x l 3 ~ x
J
l 2
L23
CJ
I
K
Abbildung durch v und w
auf den selben Punkt
CK
CI

$$\mathbf{T}_I^{JK} \sim (\mathbf{P}_J \otimes \mathbf{P}_K)(I_4 \otimes \mathbf{C}_I - \mathbf{C}_I \otimes I_4)\,\mathbf{P}_I^+$$

$$\mathbf{x}_J \sim \underbrace{\left(I_3 \otimes \mathbf{l}_K^T\right) \mathbf{T}_I^{JK}}_{\mathbf{H}_{JI}\left(\mathbf{P}_K^T \mathbf{l}_K\right)} \mathbf{x}_I$$

$$\mathbf{x}_J \sim \left\{\mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3} \mathbf{l}_K$$

$$\mathbf{l}_J^T \left\{\mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I\right\}_{3\times 3} \mathbf{l}_K = 0$$

$$\underbrace{\left(\mathbf{l}_J \otimes \mathbf{l}_K\right)^T \mathbf{T}_I^{JK}}_{\mathbf{l}_I^T,\ \text{falls korrespondierende Linien}} \mathbf{x}_I = 0$$

$$\left([\mathbf{x}_J]_\times \otimes [\mathbf{x}_K]_\times\right) \mathbf{T}_I^{JK} \mathbf{x}_I = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{JK}^T \mathbf{F}_{JI} \mathbf{e}_{IK} &= 0 \\ \mathbf{e}_{KJ}^T \mathbf{F}_{KI} \mathbf{e}_{IJ} &= 0 \\ \mathbf{e}_{KI}^T \mathbf{F}_{KJ} \mathbf{e}_{JI} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Epipolarebene!}$$

Gliederung

Kanonisches Kameratripel

Nach Normierung: $||\mathbf{e}_{JI}|| = ||\mathbf{e}_{KI}|| = 1$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_I^P &\sim \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
\mathbf{P}_J^P &\sim \begin{pmatrix} \left([\mathbf{e}_{JI}]_\times^2 \otimes \mathbf{e}_{KI}^T\right) \mathbf{T}_I^{JK}, & \mathbf{e}_{JI} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [\mathbf{e}_{JI}]_\times \mathbf{F}_{JI}, & \mathbf{e}_{JI} \end{pmatrix} \\
\mathbf{P}_K^P &\sim \begin{pmatrix} \left(\mathbf{e}_{JI}^T \otimes I_3\right) \mathbf{T}_I^{JK}, & \mathbf{e}_{KI} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} [\mathbf{e}_{KI}]_\times \mathbf{F}_{KI} + \mathbf{e}_{KI}\mathbf{v}^T, & \mathbf{e}_{KI} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dieses Kameratripel ergibt den Tensor $\mathbf{T}_I^{JK}$, d.h. es gilt:

$$\mathbf{e}_{JI} \otimes \left(\mathbf{e}_{JI}^T \otimes I_3\right) \mathbf{T}_I^{JK} - \left([\mathbf{e}_{JI}]_\times^2 \otimes \mathbf{e}_{KI}^T\right) \mathbf{T}_I^{JK} \otimes \mathbf{e}_{KI} = \mathbf{T}_I^{JK}$$

Leicht zu überprüfen mit

$$\mathbf{T}_I^{JK} = \mathbf{e}_{JI} \otimes \mathbf{A}_K - \mathbf{A}_J \otimes \mathbf{e}_{KI}$$

$$\mathbf{P}_J^P \sim \left(\mathbf{A}_J, \quad \mathbf{e}_{JI} \right), \quad \mathbf{P}_K^P \sim \left(\mathbf{A}_K, \quad \mathbf{e}_{KI} \right)$$

Ergebnis (Projektive Invarianz des Trifokaltensors)

Der Trifokaltensor ist, ähnlich wie die Fundamentalmatrix, invariant gegenüber projektiven Abbildungen des Raumes, d.h. die Kameratripel $(\mathbf{P}_I, \mathbf{P}_J, \mathbf{P}_K)$ und $(\mathbf{P}_I\mathbf{H}, \mathbf{P}_J\mathbf{H}, \mathbf{P}_K\mathbf{H})$ liefern den gleichen Tensor. Die Umkehrung gilt hier auch.

Gliederung

Umrechnung von Trifokaltensoren

$$\mathbf{T}_I^{KJ} \sim \left(\text{vec}\left(\mathbf{Q}^T\right), \text{vec}\left(\mathbf{R}^T\right), \text{vec}\left(\mathbf{S}^T\right)\right)$$

$$\mathbf{T}_I^{JK}\mathbf{e}_{IK} \sim \mathbf{e}_{JK} \otimes \mathbf{e}_{KI}$$

$$\mathbf{T}_K^{JI}\mathbf{e}_{KI} \sim \mathbf{e}_{JI} \otimes \mathbf{e}_{IK}$$

$$\mathbf{T}_K^{JI} \sim \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{U}^{-1} \\ \beta\mathbf{V}^{-1} \\ \gamma\mathbf{W}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{U}^{-1} \\ \beta\mathbf{V}^{-1} \\ \gamma\mathbf{W}^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{e}_{KI} \sim \mathbf{e}_{JI} \otimes \mathbf{e}_{IK} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{U}^{-1}\mathbf{e}_{KI} \\ \beta\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}_{KI} \\ \gamma\mathbf{W}^{-1}\mathbf{e}_{KI} \end{pmatrix} \sim \mathbf{e}_{JI} \otimes \mathbf{e}_{IK}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \mathbf{U}^{-1}\mathbf{e}_{KJ} \\ \beta \mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}_{KJ} \\ \gamma \mathbf{W}^{-1}\mathbf{e}_{KJ} \end{pmatrix} \sim \mathbf{e}_{JK} \otimes \mathbf{e}_{IJ}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} \mathbf{e}_{IK} \sim \mathbf{e}_{JK} \otimes \mathbf{e}_{KI}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{e}_{IK} &= \lambda e^1_{JK}\mathbf{e}_{KI} \\ \mathbf{V}\mathbf{e}_{IK} &= \lambda e^2_{JK}\mathbf{e}_{KI} \\ \mathbf{W}\mathbf{e}_{IK} &= \lambda e^3_{JK}\mathbf{e}_{KI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda e^1_{JK}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{e}_{KI} &= \mathbf{e}_{IK} \\ \lambda e^2_{JK}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}_{KI} &= \mathbf{e}_{IK} \\ \lambda e^3_{JK}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{e}_{KI} &= \mathbf{e}_{IK} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda e^1_{JI} e^1_{JK}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{e}_{KI} &= e^1_{JI}\mathbf{e}_{IK} \\ \lambda e^2_{JI} e^2_{JK}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}_{KI} &= e^2_{JI}\mathbf{e}_{IK} \\ \lambda e^3_{JI} e^2_{JK}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{e}_{KI} &= e^3_{JI}\mathbf{e}_{IK} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}^{JI}_{K} \sim [\ \mathrm{diag}\,(\mathbf{e}_{JI}) \cdot\ \mathrm{diag}\,(\mathbf{e}_{JK}) \otimes I_3] \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{W}^{-1} \end{pmatrix}$$