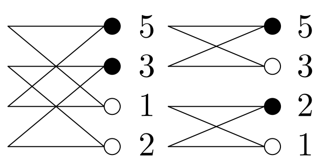
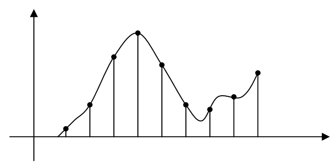
Kapitel 3

Lageinvariante Graubilderkennung

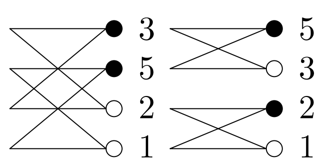
Eindimensionale translationsinvariante Merkmale

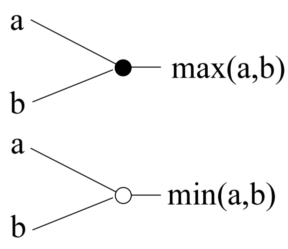
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$





$$\tau_{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$





Translationsinvarianz des Leistungsspektrums der Fouriertransformierten sowie der Autokorrelationsfunktion

Der Betrag der diskreten Fouriertransformierten (DFT, siehe DBV I) oder auch des Leistungsspektrums (Betragsquadrat) ist translationinvariant:

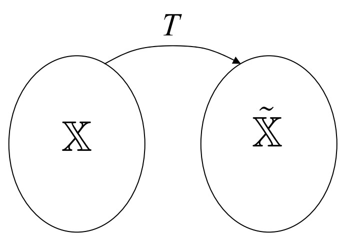
$$\text{AKF:}\quad \mathbf{z} = \mathbf{x} \# \mathbf{x} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{x}}) \circ \mathcal{F}^{*}(\tilde{\mathbf{x}})) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{x}}^{*}) = \mathcal{F}^{-1}(|\tilde{\mathbf{x}}|^{2})$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \tau_{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4+j \\ 1 \\ -4-j \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1-4j \\ -1 \\ -1+4j \end{bmatrix}$$

$$|\tilde{\mathbf{x}}| = |\tilde{\mathbf{y}}| = \begin{bmatrix} 11 \\ 4,12 \\ 1 \\ 4,12 \end{bmatrix}$$

Allgemeine Abbildung vom Vektorraum $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ (linear oder nichtlinear)

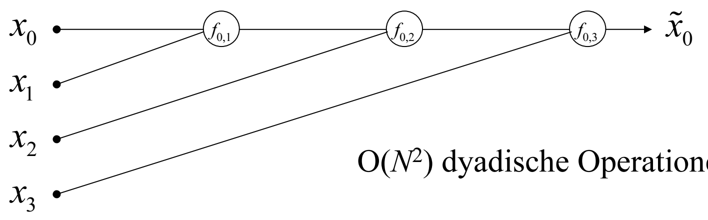
$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x}) \quad \text{mit:} \quad \dim(\mathbf{x}) = \dim(\tilde{\mathbf{x}}) = N}$$



Für die Abbildung T werden N2 zweistellige Verknüpfungen benötigt, wenn jeder Eingangswert in aller Allgemeinheit in die Berechnung eines jeden Ausgangswertes eingehen soll.

Dies wird z.B. in dem folgenden Berchnungsschema deutlich:

$$\tilde{x}_j = f_{j,N-1}(\cdots f_{j,3}(f_{j,2}(f_{j,1}(x_0,x_1),x_2),x_3)\cdots,x_{N-1})$$



O(N^2) dyadische Operationen

Z.Bsp. Die lineare Vektorraumoperation

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}_0\\ \tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03}\\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13}\\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23}\\ w_{30} & w_{31} & w_{32} & w_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_0 = \overbrace{(\underbrace{\underbrace{(w_{00}\cdot x_0 + w_{01}\cdot x_1)}_{f_{01}(x_0,x_1)} + w_{02}\cdot x_2)}_{f_{02}(\bullet,x_2)=(\bullet)+w_{02}\cdot x_2} + w_{03}\cdot x_3}^{f_{03}(\bullet,x_3)}$$

Dabei wird eine Addition+Multiplikation als eine Operation gezählt.

Eine Klasse schneller, nichtlinearer, translationsinvarianter Transformationen ℂT durch Rekursive Faktorisierung der Transformation

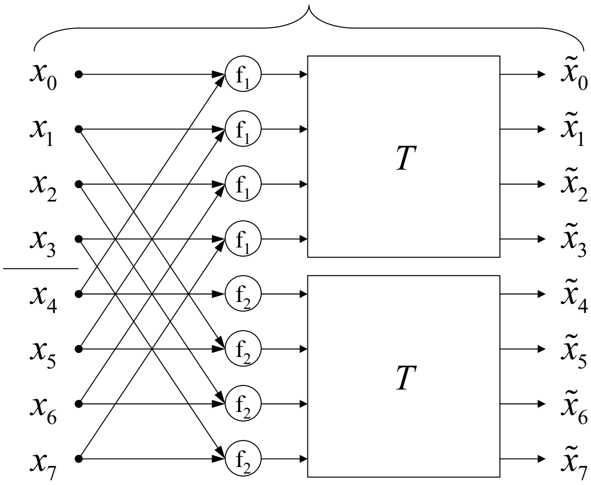
Lässt sich die Transformation hingegen faktorisieren, d.h. kann man die Transformation der Dimension N auf zwei Transformationen der halben Dimension und einem Verschmelzungsschritt mit linearem Aufwand zurückführen, so erhält man:

$$\tilde{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1(\mathbf{x}_{1|2}, \mathbf{x}_{2|2})} \\ \widetilde{f_2(\mathbf{x}_{1|2}, \mathbf{x}_{2|2})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}_{1|2}^{(1)}} \\ \widetilde{\mathbf{x}_{2|2}^{(1)}} \end{bmatrix}$$

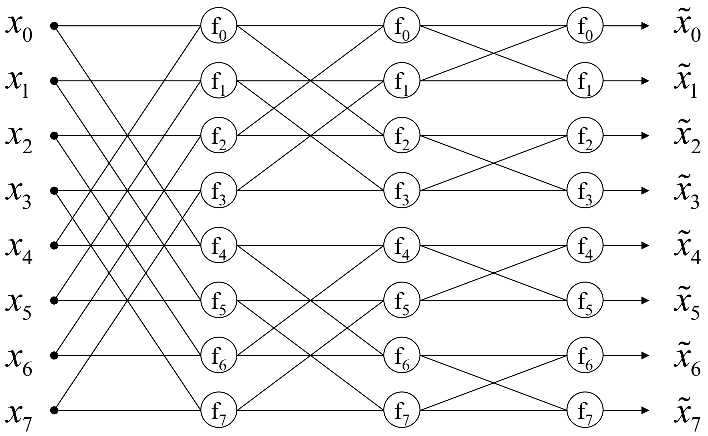
Dabei bedeutet $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ die Anwendung der zweistelligen Verknüpfung f auf korrespondierende Elemente der beiden Vektoren **x** und **y**.

Rekursive Faktorisierung der Transformation T

$$\tilde{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1(\mathbf{x}_{1|2}, \mathbf{x}_{2|2})} \\ \widetilde{f_2(\mathbf{x}_{1|2}, \mathbf{x}_{2|2})} \end{bmatrix}$$



Auflösung der Rekursion: Butterfly- oder In-Place-Signalflußgraph der schnellen Transformation T



Berechnungskomplexität

Durch die Faktorisierung ergibt sich ein Aufwand für $N=2^n$ von:

$$(1 \cdot N + 2 \cdot N/2 + 4 \cdot N/4 + \cdots N/2 \cdot 2) = N \cdot ld(N) = N \cdot n \text{ Operationen}$$

D.h. ein Aufwandsgewinn von: $\frac{N^2}{N \log_2 N} = \frac{N}{\log_2 N}$

Für $N=2^{10}=1024$ ergibt sich bereits ein Gewinn von $1024/10 \approx 100$.

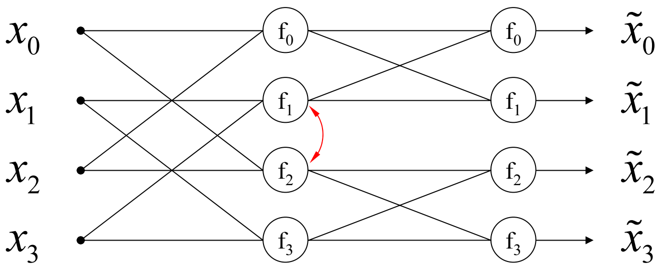
Laufzeitgewinn

N	N^2	N ld N	Gewinn: $\frac{N^2}{N \cdot \mathrm{ld}\, N} = \frac{N}{\mathrm{ld}\, N}$
100	10.000	664	15
500	250.00 0	4.483	55
1.000	10^6	10^4	100
$10^3 \cdot 10^3 = 10^6$	10^{12}	$2 \cdot 10^6$	50.000

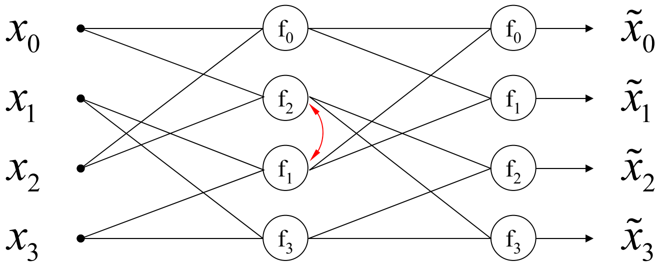
Konsequenzen der Faktorisierung

1. Schneller Algorithmus mit $N\log_2 N$ zweistelligen Verknüpfungen
2. In-Place-Algorithmus
3. Modulare Nutzung
   - Hardware: modularer Aufbau aus Bausteinen kleinerer Dimension
   - Software: modulare Nutzung kleinerer Teiltransformationen z.Bsp. bei beschränktem Hauptspeicher
4. Rekursion sehr leistungsfähig für Beweisführung (vollständige Induktion)

Übergang zum homogenen Graphen durch Permutation der Knoten



Übergang zum homogenen Graphen durch Permutation der Knoten



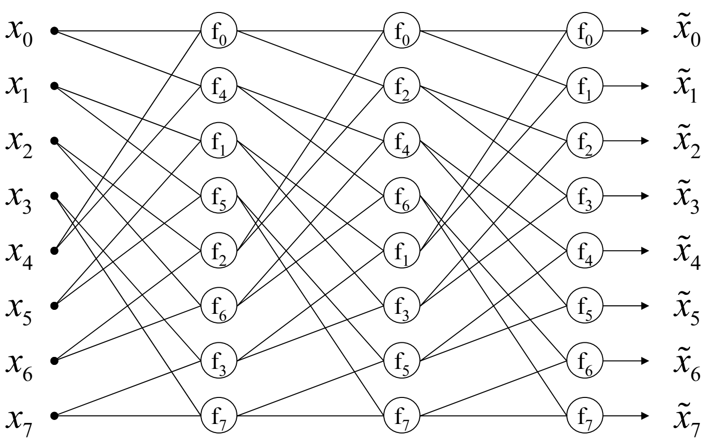
Die Umwandlung des Butterfly- in den homogenen Graphen für eine allgemeine Basis-B Faktorisierung durch Permutation der Knoten

Die Verknüpfung f_r von Schicht j des Butterfly-Graphen wandert an die Stelle r', mit:

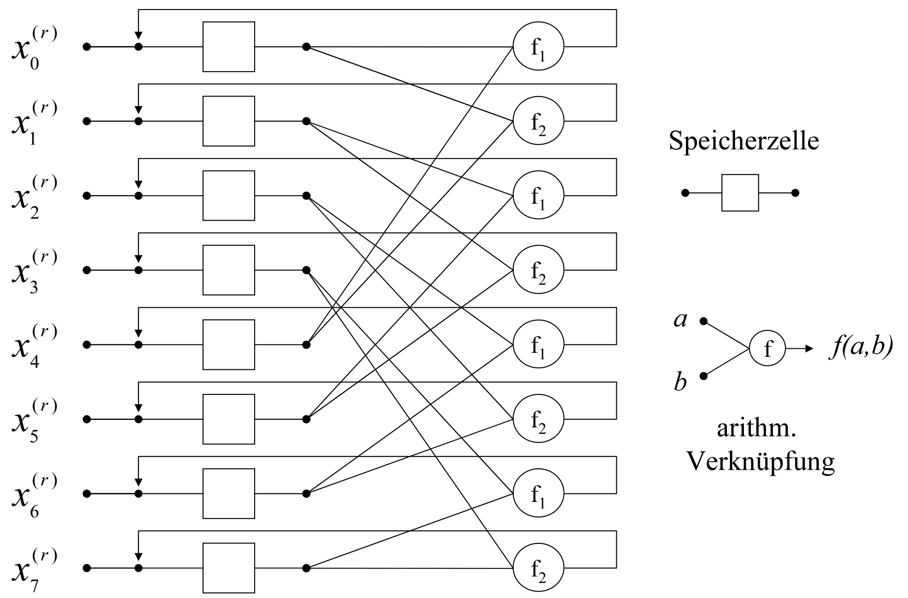
$$r'^{(j)} = \tau_j(r_B^{(0)}) = \tau_1(r_B^{(j-1)})$$

τ_j bezeichnet j zyklische Verschiebungen nach links von r, dargestellt im Basis-B-Zahlensystem mit n=$\log_B N$ Stellen

Homogener oder de Bruijn-Signalflußgraph der schnellen Transformation T



Allgemeiner paralleler Signalprozessor (N=8)



Die Transformation T in APL

```
[0] Z←T X;N
[1] ⍝ T REKURSIV (mit Bit-Reversal)
[2] →(1>N←(,⍴Z←X)÷2)/0
[3] Z←,(T((N↑X) F1 (N↓X))),[1.5](T((N↑X) F2 (N↓X)))
```

```
[0] Z←T X;I;LN;NH
[1] ⍝ T ITERATIV
[2] LN←1+2⍟NH←(⍴Z←X)÷2
[3] I←1
[4] M:Z←,((NH↑Z) F1 (NH↓Z)),[1.5]((NH↑Z) F2 (NH↓Z))
[5] →(LN≥I←I+1)/M
```

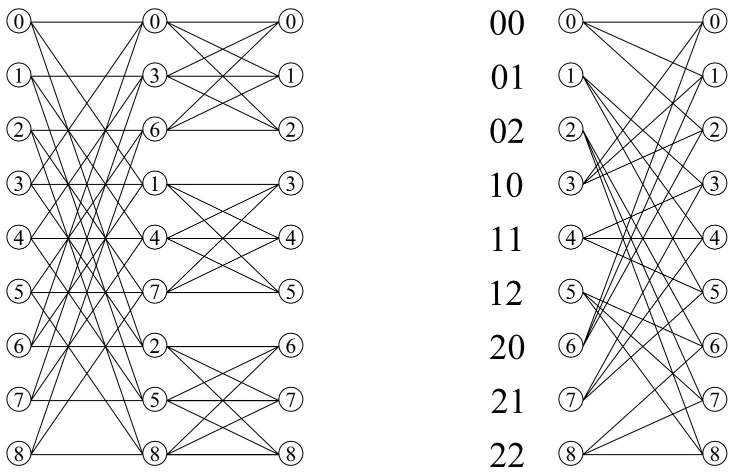
Rekursive Basis-3 Faktorisierung der Transformation T

$$\tilde{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \overline{f_1(\mathbf{x}_{1|3}, \mathbf{x}_{2|3}, \mathbf{x}_{3|3})} \\ \overline{f_2(\mathbf{x}_{1|3}, \mathbf{x}_{2|3}, \mathbf{x}_{3|3})} \\ \overline{f_3(\mathbf{x}_{1|3}, \mathbf{x}_{2|3}, \mathbf{x}_{3|3})} \end{bmatrix}$$

Dabei bedeutet $f(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ die Anwendung der dreistelligen Verknüpfung f auf korrespondierende Elemete der drei Vektoren **x**,**y** und **z**.

Übung: Beweis der Translationsinvarianz mit symmetrischer Funktion f(a,b,c), z.Bsp. (a·b·c) und (a+b+c).

Die beiden kanonischen Verarbeitungsgraphen für eine Basis-3-Faktorisierung



Nach mindestens ($\log_B N$) Schichten, geht jedes Eingangselement $\boldsymbol{x}_i$ in die Berechnung eines jeden Ausgangselementes $\tilde{x}_j$ ein!

Die Klasse schneller, nichtlinearer, translationsinvarianter Transformationen $\mathbb{C}$T

Dei Translationsinvarianz erhält man dadurch, dass man für f_1 und f_2 zweistellige ***kommutative*** Verknüpfungen fordert:

$$f_{1,2}(a,b) = f_{1,2}(b,a)$$

Beispiele:

	RT	QT	MT	BT
$f_1(a,b)$	$a+b$	$a+b$	$\max(a,b)$	$a \underset{n}{\wedge} b$
$f_1(a,b)$	$\lvert a-b \rvert$	$(a-b)^2$	$\min(a,b)$	$a \underset{n}{\vee} b$
definiert für:	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{I}_2$