Die Klasse schneller, nichtlinearer, translationsinvarianter Transformationen $\mathbb{C}T$

Die Translationsinvarianz erhält man dadurch, dass man für f_1 und f_2 zweistellige ***kommutative*** Verknüpfungen fordert:

$$f_{1,2}(a,b) = f_{1,2}(b,a)$$

Beispiele:

	RT	QT	MT	BT
$f_1(a,b)$	$a+b$	$a+b$	$\max(a,b)$	$a \underset{n}{\wedge} b$
$f_1(a,b)$	$\lvert a-b \rvert$	$(a-b)^2$	$\min(a,b)$	$a \underset{n}{\vee} b$
definiert für:	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{I}_2$

Beweis der Translationsinvarianz für die Klasse $\mathbb{C}T$

Beweisidee: eine zyklische Permutation der Länge N kann in zwei zyklische Permutationen der halben Länge zerlegt werden mit einer anschließenden Permutation der Elemente 0 und **N**/2:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N/2-1 \\ \hdashline N/2 \\ N/2-1 \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N/2-1 \\ \hdashline N/2 \\ N/2-1 \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix} +$$

$$\tau_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \tau_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} +$$

Beweis der Translationsinvarianz für die Klasse ℂT

Satz: Für die Klasse ℂT gilt: $\widetilde{\tau_1(\mathbf{x})} = \tilde{\mathbf{x}}$

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion. Aufgrund der Kommutativeigenschaft der beiden Funktionen f_1 und f_2 ergibt sich die Behauptung für einen festen Wert von N=2, nämlich:

$$\widetilde{\tau_1(\mathbf{x})} = \widetilde{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1(x_1, x_0)} \\ \widetilde{f_2(x_1, x_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1(x_0, x_1)} \\ \widetilde{f_2(x_0, x_1)} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}$$

Der Induktionsschluss wird durch den Übergang von N/2 auf N ((n-1) →n) geführt. Die Induktionsvoraussetzung lautet somit:

$$\widetilde{\tau_1(\mathbf{x}_{1|2}^{(1)})} = \widetilde{\mathbf{x}_{1|2}^{(1)}}$$

$$\widetilde{\tau_1(\mathbf{x}_{2|2}^{(1)})} = \widetilde{\mathbf{x}_{2|2}^{(1)}}$$

Für die Dimension N ergibt sich:

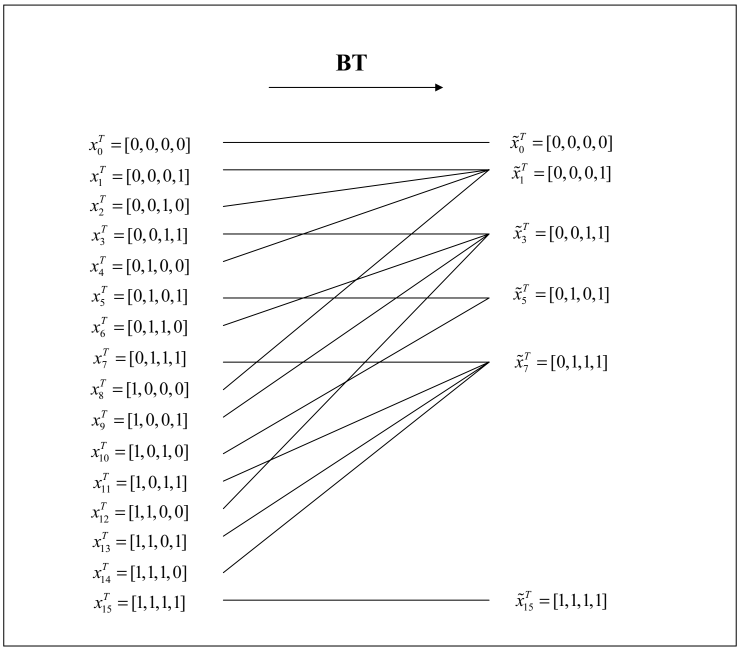
$$\widetilde{\tau_1(\mathbf{x})} = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1 \begin{bmatrix} x_{N-1}, x_{N/2-1} \\ x_0, x_{N/2} \\ x_1, x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_{N/2-2}, x_{N-2} \end{bmatrix}} \\ \widetilde{f_2 \begin{bmatrix} x_{N-1}, x_{N/2-1} \\ x_0, x_{N/2} \\ x_1, x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_{N/2-2}, x_{N-2} \end{bmatrix}} \end{bmatrix} \overset{f_1, f_2 \text{ kommutativ}}{=} \begin{bmatrix} \widetilde{f_1 \begin{bmatrix} x_{N/2-1}, x_{N-1} \\ x_0, x_{N/2} \\ x_1, x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_{N/2-2}, x_{N-2} \end{bmatrix}} \\ \widetilde{f_2 \begin{bmatrix} x_{N/2-1}, x_{N-1} \\ x_0, x_{N/2} \\ x_1, x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_{N/2-2}, x_{N-2} \end{bmatrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\tau_1(\mathbf{x}_{1|2}^{(1)})} \\ \widetilde{\tau_1(\mathbf{x}_{2|2}^{(1)})} \end{bmatrix} \overset{\text{nach Vor.}}{=} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}_{1|2}^{(1)}} \\ \widetilde{\mathbf{x}_{2|2}^{(1)}} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}$$

qed.

Damit gilt insbesondere auch für 2 oder
k Translationen:

$$\widetilde{\tau_2(\mathbf{x})} = \widetilde{\tau_1(\tau_1(\mathbf{x}))} = \widetilde{\tau_1(\mathbf{x})} = \tilde{\mathbf{x}}$$

bzw. auch: $\widetilde{\tau_k(\mathbf{x})} = \tilde{\mathbf{x}}$



B-Transformation aller eindimensionalen Binärmuster, für *N*=4
(Vollständigkeit der Abbildung für *N*=4!)

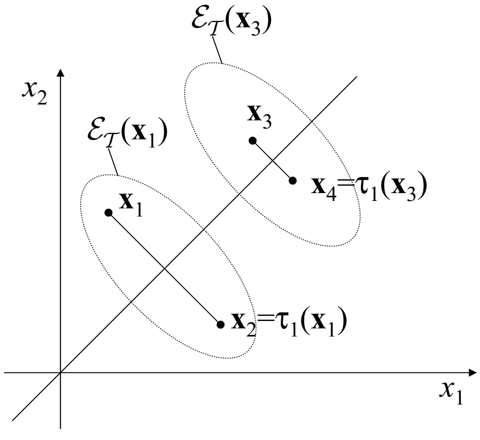
Diskussion der Eigenschaften der R-Transformation

Für die R-Transformation gilt:

$$f_1(a,b) = a + b$$
$$f_2(a,b) = |a - b|$$

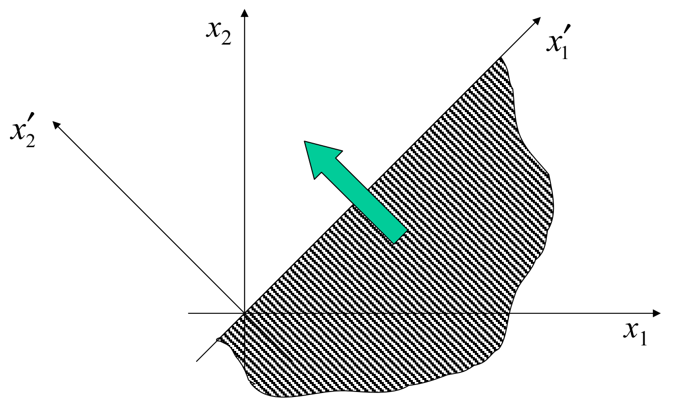
Geometrische Interpretation der R-Transformation für den zweidimensionalen Euklidschen Raum $\mathbb{R}^2$

Für den zweidimensionalen Euklidschen Raum gibt es eine einfache geometrische Interpretation der Wirkung der R-Transformation. Die Äquivalenzklasse erhält man durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.



Invarianz durch Drehung des Koordinatensystems um 45° und Faltung der unteren Halbebene auf die obere

Für den zweidimensionalen Euklidschen Raum gibt es eine einfache geometrische Interpretation der Wirkung der R-Transformation. Die Äquivalenzklasse erhält man durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.



Drehung des Koordinatensystems um 45° und Faltung der unteren Halbebene auf die obere

Drehung um 45°:

$$x_1' = x_1 \cos(\pi/4) + x_2 \sin(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x_1 + x_2)$$

$$x_2' = -x_1 \sin(\pi/4) + x_2 \cos(\pi/4) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(x_1 - x_2)$$

Faltung auf die obere Halbebene durch $x_2' \to |x_2'|$ .Verzichtet man außerdem auf die Normerhaltung der Transformation, so erhält man:

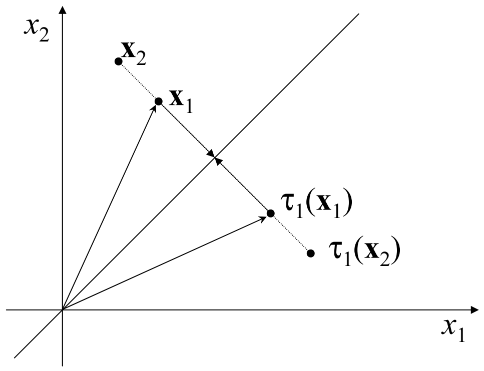
$$\tilde{x}_1 = x_1 + x_2$$
$$\tilde{x}_2 = |x_1 - x_2|$$

nämlich genau die Definition der R-Transformation für N=2. Die Vollständigkeit ist offensichtlich: $\mathcal{E}_T(\mathbf{x}_i) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}_i$

Die Faltung auf die obere Halbebene könnte anstatt der Betragsbildung auch durch eine Quadratur erreicht werden (Q-Transformation): $\tilde{x}_2 = (x_1 - x_2)^2$

Beispiel einer nicht vollständigen translationsinvarianten Transformation

Dei notwendige Bedingung der Invarianz erhält man durch Projektion auf die 1. Winkelhalbierende:



es gilt: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\varphi)$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x_1 + x_2)$$

Die notwendige Bedingung der Translationsinvarianz wird erfüllt, aber nicht die Vollständigkeit.

Vollständigkeit bei der RT

Die RT ist im allgemeinen nicht vollständig, so gilt z. Bsp. für N=4:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und: } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 7,5 \\ 0,5 \\ 5,5 \end{bmatrix} \text{ folgt: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Man kann sich nun die Frage stellen, ob es noch weitere Vektoren gibt, welche die gleichen transformierten Merkmale besitzen ?

Die Abbildungseigenschaften für die Klasse RT der Dimension N=4 können folgendermaßen beschrieben werden:

Es gilt (ohne Beweis): $$\mathbb{I}_{RT}(\mathbf{x}_1) = \mathbb{I}_{\mathbb{C}T}(\mathbf{x}_1) \cup \mathbb{I}_{\mathbb{C}T}(\mathbf{x}_2)$$

mit:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}T}({}^4\mathbf{x}) = \left\{ \underset{\mathbf{x}_1}{\overset{*}{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_2}{\overset{+}{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ x_3 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_3}{\overset{+}{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_4}{\overset{*}{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_5}{\overset{+}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_6}{\overset{*}{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_7}{\overset{*}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_8}{\overset{+}{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}}} \right\}$$

mit: $$\mathbb{I}_{\mathbb{C}T}({}^4\mathbf{x}) = \overbrace{\mathcal{T}(\mathbf{x})}^{*} \cup \overbrace{\mathcal{T}(\psi(\mathbf{x}))}^{+}$$

Vereinigung von allen zyklischen Permutationen von x und allen zyklischen Permutationen des gespiegelten Musters $\psi(\mathbf{x})$.