

## Die zweidimensionale translationsinvariante Transformation $\mathbb{C}T_{2D}$

Die zweidimensionale Translation läßt sich faktorisieren in zwei eindimensionale Translationen bzgl. aller Zeilen und Spalten.

$$\tau_{ij}(\mathbf{X}) = \tau_{s_i} \circ \tau_{z_j} \circ \mathbf{X} = \tau_{z_j} \circ \tau_{s_i} \circ \mathbf{X}$$

dabei bedeuten:

$\tau_{s_i}$  eine zyklische Permutation aller Spalten um  $i$  Plätze

$\tau_{z_j}$  eine zyklische Permutation aller Zeilen um  $j$  Plätze

Daraus folgt aber unmittelbar, daß man eine zweidimensionale Transformation der Klasse  $\mathbb{C}T_{2D}$  dadurch erhält, dass man zuerst alle Spalten und danach alle Zeilen eindimensional transformiert  $\mathbb{C}T_{zs}$ , oder umgekehrt  $\mathbb{C}T_{sz}$  (Indizes sind von rechts nach links zu lesen!):

$$\mathbb{C}T_{zs}(\tau_{ij}(\mathbf{X})) = \mathbb{C}T_{zs}(\mathbf{X}) \quad \text{und ebenso:} \quad \mathbb{C}T_{sz}(\tau_{ij}(\mathbf{X})) = \mathbb{C}T_{sz}(\mathbf{X})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}T_{zs}(\tau_{ij}(\mathbf{X})) &= \mathbb{C}T_z \circ \underbrace{\mathbb{C}T_s \circ \tau_{s_i}}_{=\mathbb{C}T_s \text{ (1D-Inv.)}} \circ \tau_{z_j} \circ \mathbf{X} = \mathbb{C}T_z \circ \underbrace{\mathbb{C}T_s \circ \tau_{z_j}}_{\text{vertauschbar}} \circ \mathbf{X} \\ &= \underbrace{\mathbb{C}T_z \circ \tau_{z_j}}_{\mathbb{C}T_z} \circ \mathbb{C}T_s \circ \mathbf{X} = \mathbb{C}T_z \circ \mathbb{C}T_s \circ \mathbf{X} = \mathbb{C}T_{zs}(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

♣

Entsprechend kann der Beweis für  $\mathbb{C}T_{sz}$  geführt werden. Zu beachten ist jedoch insbesondere i.allg. die Eigenschaft:

$$\mathbb{C}T_{zs}(\mathbf{X}) \neq \mathbb{C}T_{sz}(\mathbf{X})$$

## Zwei gegeneinander verschobene Grauwertmuster

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{2,2}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

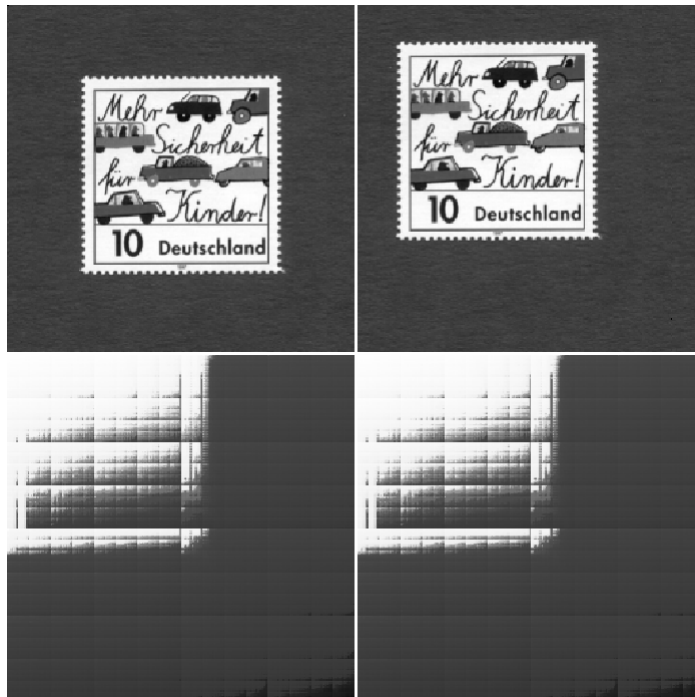
## Invariante R-Transformierte

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 7 & 7 & 15 & 3 & 9 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & 5 & 5 & 13 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & 9 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

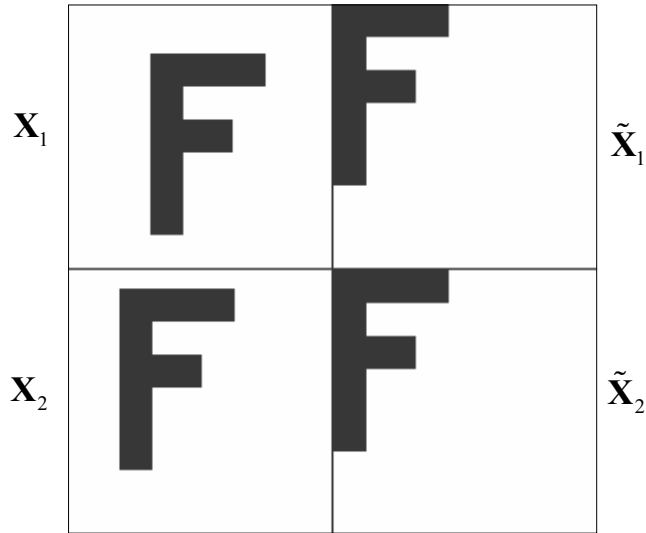
$$\widetilde{(\tau_{2,2}(\mathbf{X}))} = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 7 & 7 & 15 & 3 & 9 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & 5 & 5 & 13 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & 9 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

# Invariante B-Transformierte

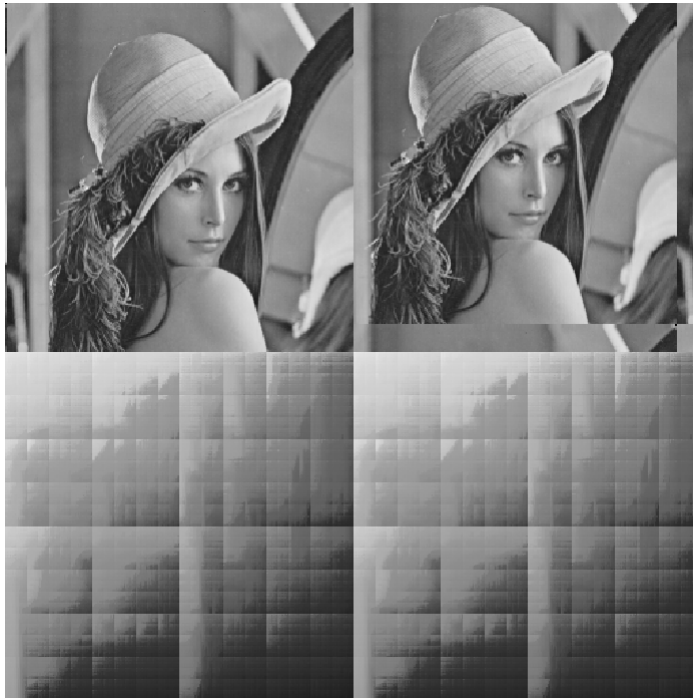
$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \widetilde{(\tau_{2,2}(\mathbf{X}))} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$



MT<sub>zs</sub> bei  
homogenem  
Hintergrund

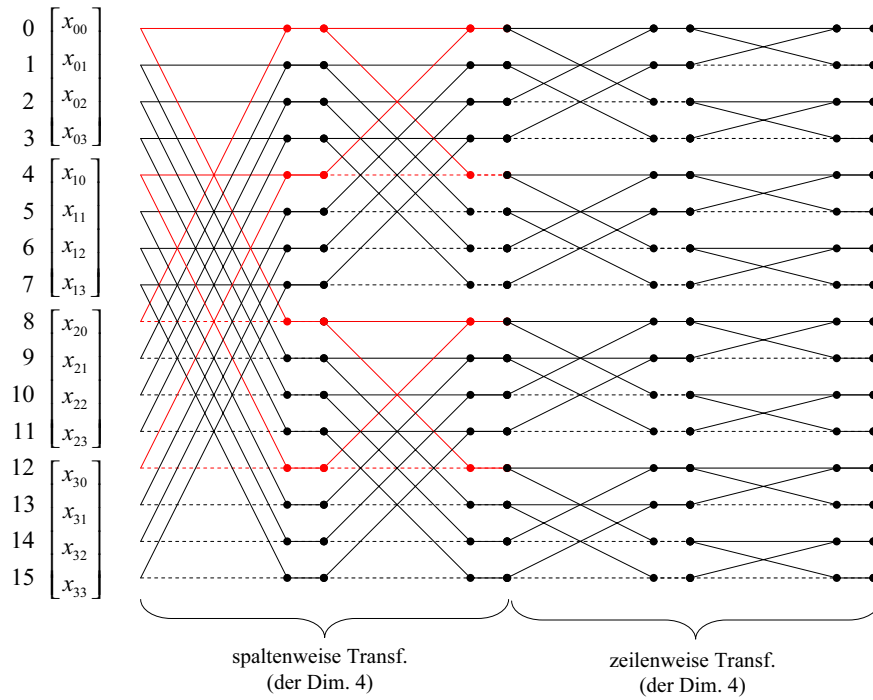


BT<sub>zs</sub> bei  
homogenem  
Hintergrund

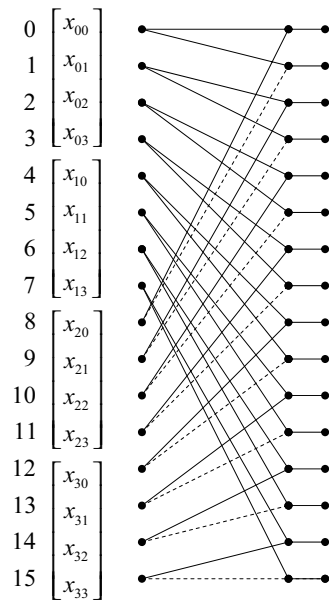


MT<sub>zs</sub> bei  
inhomogenem  
Hintergrund

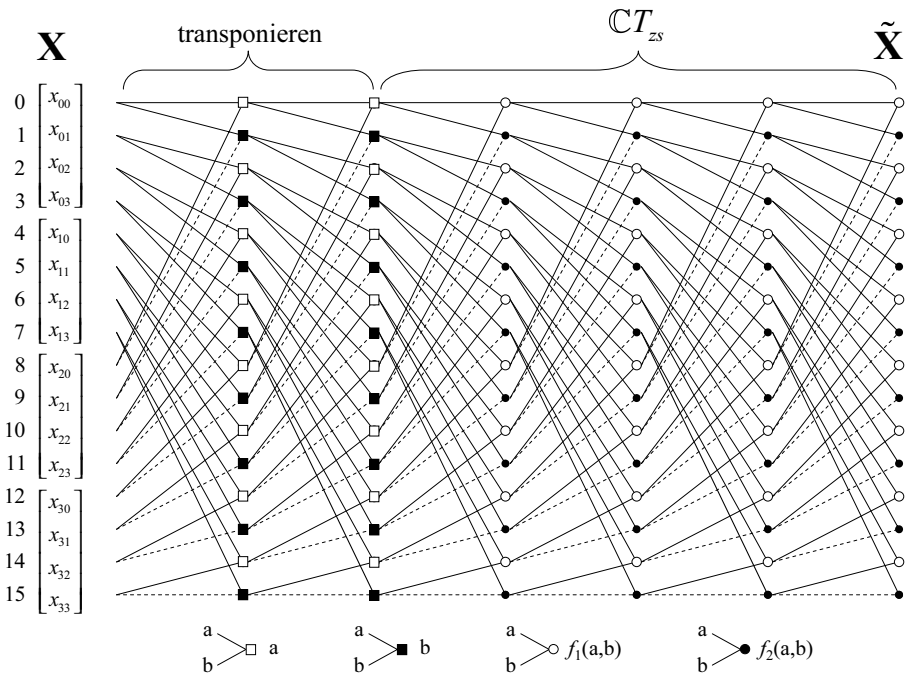
### Eindimensionale Realisierung der zweidimensionalen $\mathbb{C}T_{zs}$



### Homogene Struktur zur eindimensionalen Realisierung der zweidimensionalen $\mathbb{C}T_{zs}$



Homogene Struktur zur eindimensionalen Realisierung der zweidimensionalen  $\mathbb{C}T_{sz}$



Eine allgemeinere Klasse zweidimensionaler translationsinvarianter Transformation  $\mathbb{C}T_{2D}$

Es gilt offensichtlich:

$$\mathbb{C}T_{sz} = \omega_T^{-1} \circ \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_T \circ \mathbf{X}$$

Da auch das transponierte Ergebnis invariant ist, kann man sich die letzte Transposition ersparen:

$$\mathbb{C}T_{sz} = \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_T \circ \mathbf{X}$$

## Zu dieser Klasse gehört die Diagonaltransformation $\mathbb{C}T_{DI}$

Es gilt offensichtlich:

$$\mathbb{C}T_{DI} = \mathbb{C}T_{zs}(\omega_{DI}(\mathbf{X}))$$

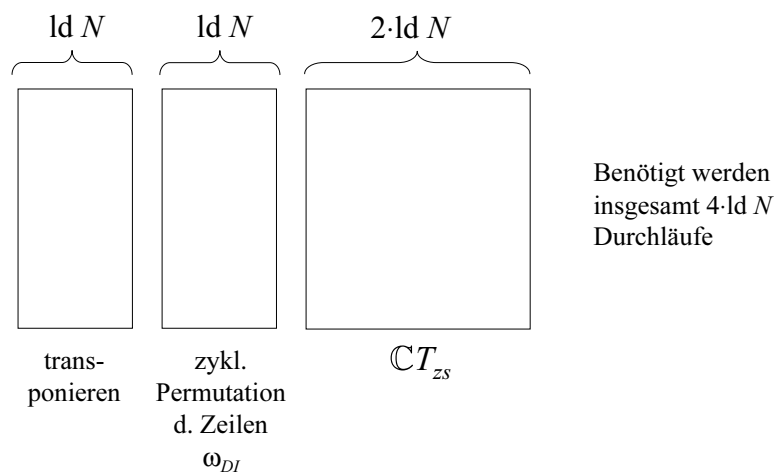
mit:  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^T \\ \mathbf{x}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \end{bmatrix}$  und  $\dim(\mathbf{X}) = N \times N$

definiert man die Diagonalpermutation:

$$\omega_{DI}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \tau_0(\mathbf{x}_0^T) \\ \tau_1(\mathbf{x}_1^T) \\ \vdots \\ \tau_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}^T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & \cdots & x_{0,N-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1,N-1} & x_{N-1,0} & x_{N-1,1} & \cdots & x_{N-1,N-2} \end{bmatrix}$$

Die k-te Zeile  
wird k-mal  
zyklisch  
permutiert

## Realisierung der $\mathbb{C}T_{DI}$ auf Parallelrechner mit homogenem Verbindungsnetzwerk



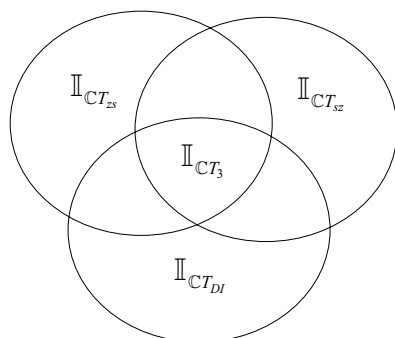
## Zweidimensionale translationsinvariante Transformationsklasse mit einer Menge allgemeinerer verträglicher Permutationen $\Omega := \{\omega_i\}$

$$\mathbb{C}T_{zs}(\omega_k(\tau_{ij}(\mathbf{X}))) = \mathbb{C}T_{zs}(\omega_k(\mathbf{X})) \quad \text{für } \forall \omega_k \in \Omega$$

(ohne Beweis!)

## Erhöhung des Grades an Vollständigkeit durch die Kombination verschiedener invarianter Transformationen

Vereinigt man zwei oder mehr Transformationen, so folgt aus der Tatsache, dass deren Invariantenmengen i.allg. voneinander verschieden sind, dass sich die Invariantenmengen der neuen Transformation aus der Schnittmenge der ursprünglichen Transformationen ergeben:

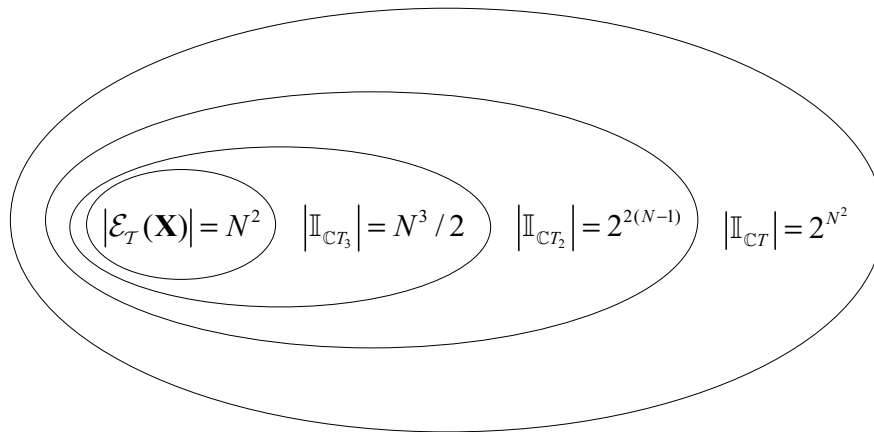


$$\mathbb{C}T_3 := \underbrace{\mathbb{C}T_{zs} \cup \mathbb{C}T_{sz}}_{\mathbb{C}T_2} \cup \mathbb{C}T_{DI}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_3} := \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{zs}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{sz}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{DI}}$$



## Grad an Vollständigkeit für die verschiedenen Klassen von Transformationen



## Störempfindlichkeit der RT

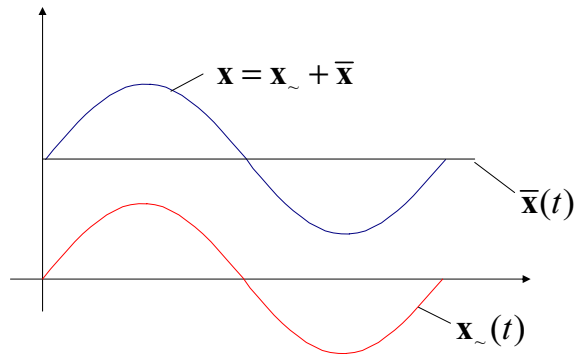
Reaktion auf systematische Störungen: Helligkeits- und Kontrastveränderungen:

$$\mathbf{x}' = k\mathbf{x} + a\mathbf{u} \quad \text{mit: } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zusätzlich stochastische Störungen:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

# Zerlegung eines Signals in einen Wechsel- und einen Gleichanteil



$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\sim} + \bar{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{x}_{\sim}}_{\text{mittelwertfreier Anteil}} + \underbrace{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{u}}_{\text{Gleichanteil}} \quad \text{mit: } \bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x(t) dt \text{ bzw.: } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Satz: Ein zusätzlicher Gleichanteil beeinflusst nur den 0-ten Koeffizienten der RT; Invarianz erhält man einfach durch ignorieren des 0-ten Koeffizienten

$$\widetilde{(\mathbf{x} + a\mathbf{u})} = \tilde{\mathbf{x}} + a \cdot N \cdot \mathbf{e}_1 = \tilde{\mathbf{x}} + a \cdot N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{u} \hat{=} \text{Gleichanteil}, \mathbf{e}_1 \hat{=} 1$ . Einheitsvektor

Satz: Die RT ist streng homogen bzgl. mittelwertfreier Muster  $\mathbf{x}_{\sim}$ :

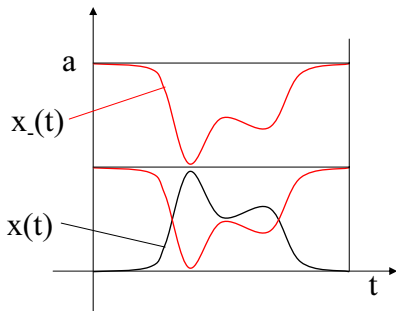
$$\widetilde{k\mathbf{x}_{\sim}} = |k| \tilde{\mathbf{x}_{\sim}}$$

Beweis: vollständige Induktion

# Kontrastumkehr bei der RT

Die RT ist invariant bzgl. einer Kontrastumkehr, wenn man den 0-ten Koeffizienten unterdrückt (nur verantwortlich für den Gleichanteil):

$$\mathbf{x}_- = a\mathbf{u} - \mathbf{x} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \mathbf{x}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{x}_- &= a\mathbf{u} - \mathbf{x} = a\mathbf{u} - (\mathbf{x}_- + \bar{x}\mathbf{u}) \\ &= (-\mathbf{x}_-) + (a - \bar{x})\mathbf{u} \\ &\Rightarrow \widetilde{\mathbf{x}}_- = \widetilde{\mathbf{x}}_- + N(a - \bar{x})\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

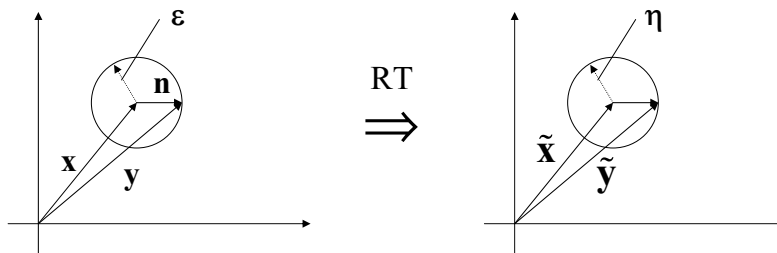
wegen:

$$\widetilde{(-\mathbf{x}_-)} = \widetilde{\mathbf{x}}_- \quad \text{und} \quad \widetilde{a\mathbf{u}} = Na\mathbf{e}_1$$

Unter der Annahme, dass nur positive Intensitäten zugelassen sind, gilt:  $a \geq \max(x_i)$

# Reaktion der RT auf stochastische Störungen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$



Die Abbildung ist stetig bzgl. der Euklidischen Metrik!

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{n}\| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \eta$$

präziser:  $\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \sqrt{N} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$  wobei:  $\dim(\mathbf{x}) = \dim(\mathbf{y}) = N$

d.h.  $\boxed{\eta = \sqrt{N}\varepsilon}$

Beweis:  
vollst. Ind.

## Zwei Abbildungsbeispiele für die RT

a) Ergebnis liegt auf dem Rand der Abschätzung:

$$\mathbf{x}^T = [1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8 \ 7 \ 4 \ 2] \quad \mathbf{n}^T = [0,385 \ 0,196 \ 0,22 \ -0,595 \ -0,307 \ -0,296 \ 0,462 \ 0,121]$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^T = [36 \ 0 \ 2 \ 2 \ 16 \ 0 \ 6 \ 6] \quad \tilde{\mathbf{y}}^T = (\widehat{\mathbf{x} + \mathbf{n}})^T = [36,2 \ 1,33 \ 2,98 \ 1,77 \ 13,9 \ 0,274 \ 5,77 \ 5,33]$$

$$\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| = 2,83 \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{=1} = \sqrt{N} = \sqrt{8}$$

b) Ergebnis liegt im Innern der Abschätzung:

$$\mathbf{x}^T = [8 \ 3 \ 5 \ 1] \quad \mathbf{n}^T = [-4,5 \ 4,5 \ -4,5 \ 4,5]$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^T = \tilde{\mathbf{y}}^T = [17 \ 9 \ 5 \ 1]$$

$$\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| = 0 \leq 2 \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{=9} = 18$$

## Dynamikumfang der Klasse $\mathbb{C}T$

- Die B- und die M-Transformation sind abgeschlossen, d.h. alle Zwischen- und das Endergebnis liegen im Zahlenbereich der Ausgangsdaten des A/D-Wandlers
- Bei der RT ergibt sich folgender Dynamikumfang (Anzahl der Binärstellen) der Transformatierten:

$$\underbrace{m}_{A/D\text{-Wandler}} + n = m + \log_2 N$$

d.h. in jeder Schicht der RT kommt höchstens eine Stelle hinzu (Verdopplung des Wertes)