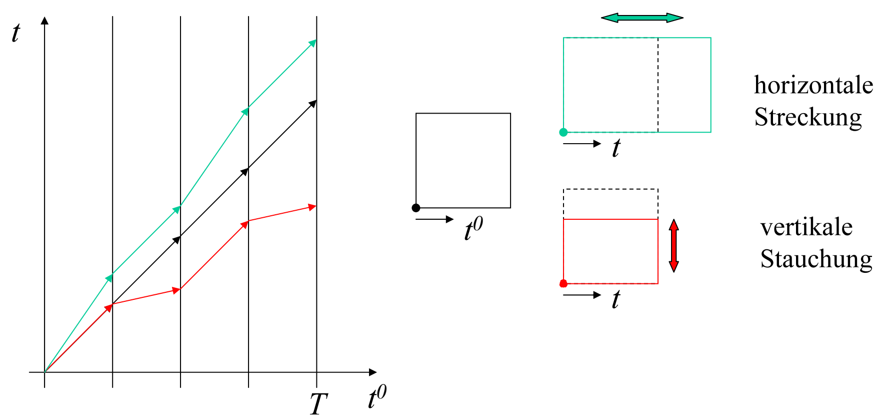
Wahl einer Parametrisierung, welche eine lineare (homogene) Abbildung $t^0 \rightarrow t$ unter der Wirkung der affinen Abbildung **A** garantiert

$$t(t^0, \mathbf{A}) = \mu(\mathbf{A}) \cdot t^0$$

Diese Forderung wird von der Bogenlänge nicht erfüllt!

Nichtlineare Abbildung über die Bogenlänge bei Scherung der Objekte



Wahl einer geeigneten Parametrisierung

<u>1. Möglichkeit:</u> Verwendung von Differentialinvarianten zweiter Ordnung in Form der affinen Länge. Benötigt werden:

$$[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]$$

<u>2. Möglichkeit:</u> Verwendung von Differentialinvarianten 1. Ordnung und zusätzliche Normierung durch den Flächenschwerpunkt $\mathbf{x}_s$ (semidifferentieller Ansatz). Benötigt werden:

$$[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$$

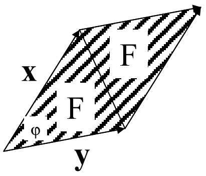
Das Aussenprodukt und seine geometrische Bedeutung

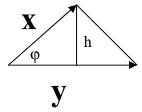
Das Außenprodukt zwischen zwei Vektoren [**x**,**y**] ist eine (vorzeichenbehaftete) reelle Zahl, welche betragsmässig der Fläche des eingeschlossenen Parallelogramms entspricht (oder: 2 mal der Dreiecksfläche)

Außenprodukt:

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \det(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin(\varphi)$$

$$\left|[\mathbf{x},\mathbf{y}]\right| = 2 \cdot F_\Delta$$





$$h = \|\mathbf{x}\|\sin(\varphi)$$

$$F_\Delta = \|\mathbf{y}\| \cdot h / 2 = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{y}\|\|\mathbf{x}\|\sin(\varphi)$$

Ergebnisse aus der Differentialgeometrie

Wir leiten eine Parametrisierung t geeignet aus der Bogenlänge s ab.
Für eine analytische Kurve (beliebig oft stetig differenzierbar) gilt:

$$dt(s) = \sqrt[(2n+1)]{\left[\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n+1)}\right]}ds = \sqrt[(2n+1)]{\begin{vmatrix} u^{(n)} & u^{(n+1)} \\ v^{(n)} & v^{(n+1)} \end{vmatrix}}ds \qquad n \geq 1$$

mit: $\mathbf{x}^{(n)} = \dfrac{d^n x}{ds^n}$

$$\Rightarrow \quad dt = \underbrace{\sqrt[(2n+1)]{|\mathbf{A}|}}_{\mu(\mathbf{A})} \underbrace{\sqrt[(2n+1)]{\left[\mathbf{x}^{0^{(n)}}, \mathbf{x}^{0^{(n+1)}}\right]}ds}_{dt^0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dt = \mu(\mathbf{A}) \cdot dt^0}$$

<u>1. Möglichkeit:</u> Verwendung von Differentialinvarianten zweiter Ordnung in Form der affinen Länge

$$t = \int_C \sqrt[3]{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]}ds \quad \text{affine Länge}$$

mit: $\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{d\mathbf{x}(s)}{ds}$ ($s \mathrel{\hat{=}}$ Bogenlänge)

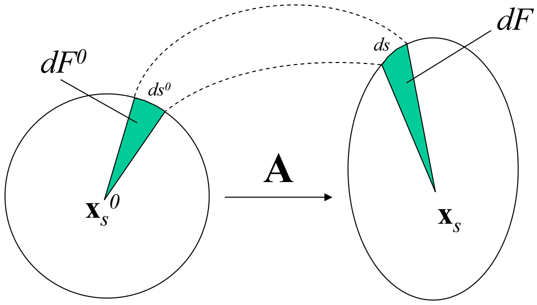
es gilt: $$\underbrace{\int_C \sqrt[3]{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]}ds}_{t} = \underbrace{\sqrt[3]{|\mathbf{A}|}}_{\mu(\mathbf{A})} \cdot \underbrace{\int_C \sqrt[3]{\left[\dot{\mathbf{x}}^0, \ddot{\mathbf{x}}^0\right]}ds}_{t^0}$$

und damit: $$\boxed{t = \sqrt[3]{|\mathbf{A}|}t^0 = \mu(\mathbf{A})t^0}$$

<u>Problem bei Polygonzügen:</u> entlang von Geraden verschwindet zweite Ableitung und in den Eckpunkten ist 1. Ableitung unstetig und damit die zweite Ableitung nicht definiert!

2. Möglichkeit: Verwendung von Differentialinvarianten 1. Ordnung und zusätzliche Normierung durch den Flächenschwerpunkt $\mathbf{x}_s$ (semidifferentieller Ansatz)

Man verwendet die von dem vom Schwerpunkt ausgehenden Zeiger an die Kontur überstrichene Fläche zur Parametrisierung (Außenprodukt zwischen Zeiger und Tangentenvektor)



$$\boxed{\begin{aligned} dF &= \alpha(\mathbf{A})\cdot dF^0 \\ &= \det(\mathbf{A})\cdot dF^0 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} t = F &= \int_C [\mathbf{x}-\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}]ds \\ &= |\mathbf{A}|\int_C [\mathbf{x}^0-\mathbf{x}_s^0, \dot{\mathbf{x}}_0]ds \\ &= \mu(\mathbf{A})\cdot F^0 = \mu(\mathbf{A})\cdot t^0 \end{aligned}$$

wegen: $\det(\mathbf{Ax},\mathbf{Ay}) = \det(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{x},\mathbf{y})$

$\Rightarrow \quad [\mathbf{Ax},\mathbf{Ay}] = \det(\mathbf{A})\cdot[\mathbf{x},\mathbf{y}]$