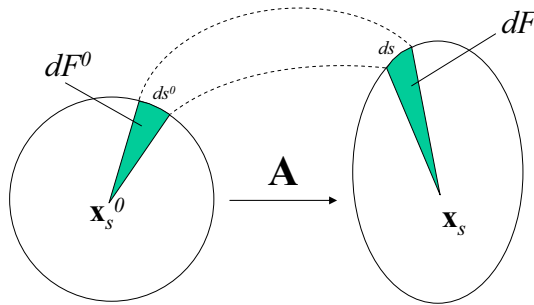


2. Möglichkeit: Verwendung von Differentialinvarianten 1. Ordnung und zusätzliche Normierung durch den Flächenschwerpunkt \mathbf{x}_s (semidifferentieller Ansatz)

Man verwendet die von dem vom Schwerpunkt ausgehenden Zeiger an die Kontur überstrichene Fläche zur Parametrisierung (Außenprodukt zwischen Zeiger und Tangentenvektor)



$$\begin{aligned} dF &= \alpha(\mathbf{A}) \cdot dF^0 \\ &= \det(\mathbf{A}) \cdot dF^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = F &= \int_c [\mathbf{x} - \mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}] ds \\ &= |\mathbf{A}| \int_c [\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_s^0, \dot{\mathbf{x}}^0] ds \\ &= \mu(\mathbf{A}) \cdot F^0 = \mu(\mathbf{A}) \cdot t^0 \end{aligned}$$

wegen: $\det(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) = \det(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

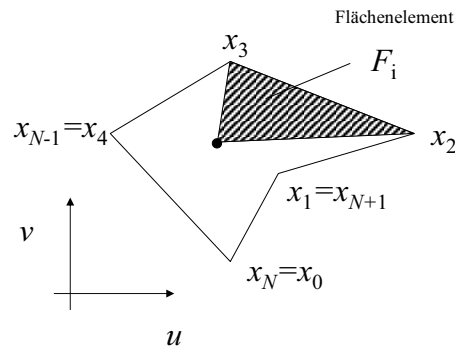
$$\Rightarrow [\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}] = \det(\mathbf{A}) \cdot [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

Die Wirkung der Translation wird eliminiert, wegen der Normierung auf den Flächenschwerpunkt!

Es gilt: Die affine Transformation bildet Flächenschwerpunkte aufeinander und Flächen im konstanten Verhältnis ab!

Das Außenprodukt ist vorzeichenbehaftet! Um Mehrdeutigkeiten bei der Parametrisierung zu vermeiden wählt man den Betrag des Flächenzuwachses $|dF|$ und damit eine monoton wachsende Parametrisierung!

Affinvariante Fourierdeskriptoren von Polygonzügen



Polygon: $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]$ $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$

Affinvariante Fourierdeskriptoren von Polygonzügen

Flächenschwerpunkt:

$$\mathbf{x}_s = \frac{1}{3} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \overbrace{[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]^{\det(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})}} (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1})}{\sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (u_i v_{i+1} - u_{i+1} v_i) (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1})}{\sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]}$$

Parameter: $t_0 = 0$

$$t_{i+1} = t_i + \frac{1}{2} \underbrace{|u'_i v'_{i+1} - u'_{i+1} v'_i|}_{F_i} \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad \boxed{T = t_N}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} u - u_s \\ v - v_s \end{bmatrix}$$

Fourierkoeffizienten

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2T} \sum_{i=0}^{N-1} (\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} U_k \\ V_k \end{bmatrix} = \frac{T}{(2\pi k)^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\mathbf{x}'_{i+1} - \mathbf{x}'_i)}{(t_{i+1} - t_i)} (e_{k,i+1} - e_{k,i})(1 - \delta(t_{i+1} - t_i)) \\ + \frac{j}{2\pi k} \sum_{i=0}^{N-1} (\mathbf{x}'_{i+1} - \mathbf{x}'_i) e_{k,i} \delta(t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } k \neq 0$$

mit: $e_{k,i} = e^{-j2\pi k t_i / T}$

$$\delta(t_{i+1} - t_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_{i+1} = t_i \quad (\text{Flächenzuwachs}=0) \\ 0 & \text{falls } t_{i+1} \neq t_i \end{cases}$$

erster Teil transformiert stetige Anteile

zweiter Teil transformiert Unstetigkeiten

(Umschaltung durch δ -Operator)

Fourierkoeffizienten affin verzerrter Konturen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}^0(t^0 + \tau) + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X}_k = \mathcal{F}(\mathbf{x}(t))$$

$$\mathbf{X}_k^0 = \mathcal{F}(\mathbf{x}^0(t^0))$$

daraus folgt:

$$\mathbf{X}_k = z^k \mathbf{A}\mathbf{X}_k^0 \quad k \neq 0 \quad (\text{eliminiert Translation}) \\ z = e^{-j2\pi\tau/T}$$

A-Invarianten ($\tau=0$)

mit:

$$\Delta_{kp} = \det[\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_p^*] = \det(\mathbf{A}) \cdot \det[\mathbf{X}_k^0, \mathbf{X}_p^{0*}] = \det(\mathbf{A}) \cdot \Delta_{kp}^0$$

daraus ergeben sich vollständige und minimale Invarianten:

$$Q_k = \frac{\Delta_{kp}}{\Delta_{pp}} = \frac{\det[\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_p^*]}{\det[\mathbf{X}_p, \mathbf{X}_p^*]} = \frac{\cancel{\det(\mathbf{A})} \Delta_{kp}^0}{\cancel{\det(\mathbf{A})} \Delta_{pp}} = \frac{U_k V_p^* - V_k U_p^*}{U_p V_p^* - V_p U_p^*}$$

$$p = \text{const} \neq 0 \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

für $\tau \neq 0$ ergibt sich hingegen:

$$Q_k = Q_k^0 \cdot z^{k-p} = Q_{kp}^0 \cdot z^k$$

↑
muss noch eliminiert werden

Zusätzliche Aufpunktinvarianz ($\tau \neq 0$)

(spezielle Lösung zweiter Ordnung)

$$I_k = Q_k \Phi_q^{(k-p)\lambda} \Phi_r^{(k-p)\eta}$$

wobei:

$$Q_k = |Q_k| \Phi_k = |Q_k| e^{j \arg(Q_k)}$$

Dabei sind (λ, η) ganzzahlige Lösungen der folgenden linearen diophantischen Gleichung:

$$\lambda(q-p) + \eta(r-p) + 1 = 0$$

eine Lösung existiert bei:

$$\text{ggT}(q-p, r-p) = 1$$

(Lösung mit erweitertem Euklid-Algorithmus)

Diese Invarianten sind ebenfalls vollständig und minimal!

Der Ansatz realisiert auch hier eine Kompensation der Phasen, welche unbekannt sind modulo 2π .

also zum Beispiel:

$$r = 7, q = 6, p = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} q - p = 5 \\ r - p = 6 \end{array} \right\} \text{ggT}(5, 6) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda \cdot 5 + \eta \cdot 6 + 1 = 0}$$

erfüllt für: $\lambda = 1, \eta = -1$

$$\Rightarrow \boxed{I_k = Q_k \Phi_6^{k-1} \Phi_7^{1-k}}$$

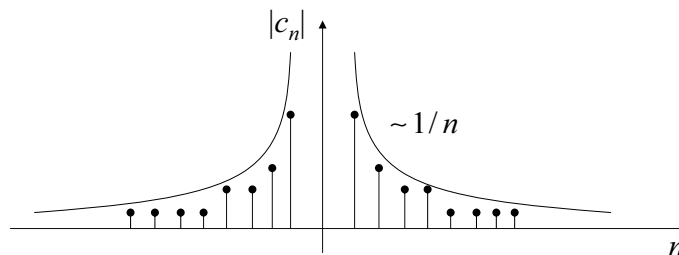
Auch hier erhält man aus den Invarianten eindeutig einen Repräsentanten aus der Äquivalenzklasse, d.h. eine Kontur in einer bestimmten Lage und Aufsicht!

Auch hier ergibt sich eine lineare Berechnungskomplexität bei einer konstanten Anzahl von Fourierdeskriptoren:

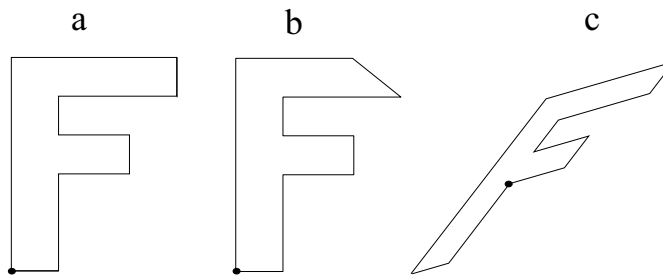
$$O(N)$$

Eigenschaften der Fourierreihen

Da die parametrische Konturbeschreibung Unstetigkeiten enthält (Polygonabschnitt in radialer Richtung mit Flächenzuwachs 0) streben die Beträge der FK nur mit $1/n$ gegen Null, also langsamer als bei stetigen Funktionen.



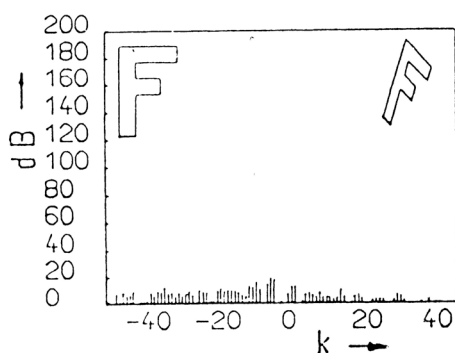
Affinvariante Fourierdeskriptoren



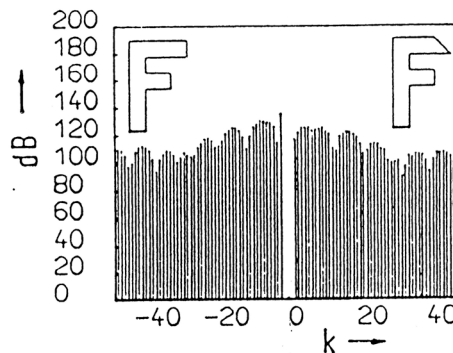
n	Fourierkoeffizienten						Invarianten		
	a		b		c		\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
-5	0.107	0.004	0.146	-0.001	-0.086	0.284	0.075	0.094	0.075
-4	-0.006	-0.034	-0.047	-0.058	-0.086	0.311	0.057	0.084	0.057
-3	-0.036	-0.055	-0.001	-0.074	0.126	0.481	0.029	0.014	0.029
-2	0.283	-0.477	0.227	-0.490	-1.560	0.392	0.315	0.290	0.315
-1	-0.263	-0.779	-0.178	-0.733	-5.370	0.661	0.000	0.000	0.000
0	---	---	---	---	---	---	---	---	---
1	-1.120	-1.730	-1.090	-1.650	0.743	-7.330	1.000	1.000	1.000
2	-0.024	-0.375	-0.064	-0.467	0.927	-0.751	0.229	0.252	0.229
3	-0.169	-0.104	-0.191	-0.096	0.702	0.030	0.104	0.111	0.104
4	-0.081	0.182	-0.063	0.175	0.476	-0.385	0.119	0.126	0.119
5	0.066	-0.020	0.057	0.014	0.046	-0.201	0.061	0.059	0.061

$$F' = A \cdot F \quad \text{mit: } F = 0,5 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 & 2 & 7 & 7(5) & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 7 & 7 & 9 & 9 & 11 & 11 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Leistungsspektren von der Differenz der Invarianten beider Objekte



Unterschied bei realer affiner Abbildung unter Beachtung des Quantisierungsfehlers



Unterschied bei realen Strukturveränderungen