Kapitel 5

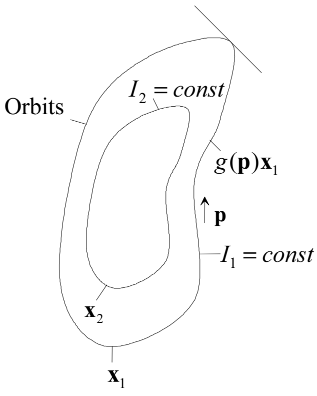
Allgemeine Ansätze zur Berechnung von Invarianten

Die drei kanonischen Möglichkeiten zur Berechnung von Invarianten (notwendige Bedingungen)

1) Integration über die Transformationsgruppe
(Haar-Integral, Hurwitz 1897)

$$I = \int_{\mathcal{G}} f(g(\mathbf{p})\mathbf{x})dg$$

z.Bsp. f: Polynome



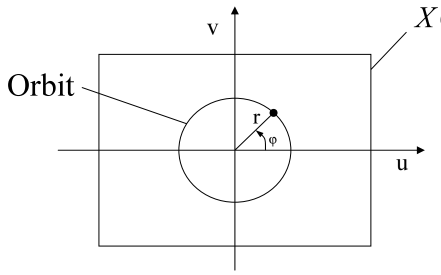
2) Differenzieller Ansatz

$$\frac{\partial I(g(\mathbf{p})\mathbf{x})}{\partial p_i} \equiv 0 \quad \text{für beliebige } \mathbf{p}$$

löse die entspr. partiellen Dgl. => Lie-Theorie

3) Normalisierung
reduziere die Darstellung auf extremale Punkte der Orbits, z.Bsp. Auf den Punkt maximaler Krümmung (Schwerpunktnormierung, FDen)

Beispiel für den differentiellen Ansatz



$X(u,v) = X(r,\varphi)$ Graubild

$u = r\cos(\varphi)$

$v = r\sin(\varphi)$

Gesucht sind Invarianten für die Drehgruppe $\mathcal{G}(\varphi)$:

$$g(\varphi)X(u,v) = X(u\cos\varphi - v\sin\varphi, u\sin\varphi + v\cos\varphi)$$

Gesucht ist eine Funktion *f* mit der Eigenschaft:

$$\frac{df(g(\varphi)X(u,v))}{d\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{Kettenregel}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(-u\sin\varphi - v\cos\varphi) + \frac{\partial f}{\partial v}(u\cos\varphi - v\sin\varphi) = 0$$

$$\varphi = 0: \quad \boxed{-v\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v} = 0}$$

Diese partielle Dgl. wird gelöst durch:

$$f(u,v) = u^2 + v^2 = r^2$$

D.h. alle Funktionen, die nur vom Radius *r*, aber nicht vom Winkel φ abhängen sind zulässige invariante Merkmale für die Drehgruppe, also z. B. das Integral über ein Kreissegment, oder auch alle höheren Momente:

$$f(u,v) = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^n X(r,\varphi)\,d\varphi\,dr$$

Diese Momente werden für $n \to \infty$ sogar vollständig.

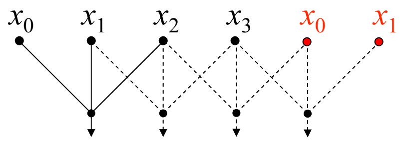
Schwierigkeit der differentiellen Methodik:

Die Notwendigkeit partielle Differentialgleichungen zu lösen (falls die Gruppe mehr als einen Parameter hat)

Integration über die endliche Gruppe der Translationen

Bei endlichen Gruppen geht die Integration über in eine Summation über die Gruppe (sog. Gruppenmittel). Es werden bevorzugt polynomiale Funktionen mit lokalem Definitionsbereich (functions of finite support) bevorzugt, also z.Bsp. Für N=4:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



$f_1(\mathbf{x}) = x_0 x_1^2 x_2$

Ein Monom, ist ein Polynom von der Form

$$P(\mathbf{x}) = x_0^{d_0} x_1^{d_1} \cdots x_{n-1}^{d_{n-1}}$$

Die Summe $d = \sum_{i=0}^{n-1} d_i$ wird als Grad des Monoms bezeichnet.

Durch Summation über die Gruppe ergibt sich ein invariantes Merkmal zu:

$$\tilde{x}_1(f_1(\mathbf{x})) = x_0 x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 x_0 + x_3 x_0^2 x_1$$

Der Nachweis der Invarianz ist einfach nachzuprüfen durch zyklische Permutation der Indizes: $f(\tau_1(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$

Eine noch einfachere Invariante ergibt sich durch Summation über das Monom ersten Grades $f_0 = x_0$ zu:

$$\tilde{x}_0(f_0(\mathbf{x})) = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{(einfacher Mittelwert)}$$

Vollständigkeit für endliche Gruppen

(Emmy Noether, 1916)

Für endliche Gruppen $\mathcal{G}$ mit $|\mathcal{G}|$ Elementen und Muster der Dimension N erhält man vollständige Merkmale, oder eine Basis, wenn man über alle Monome vom Grad $\leq|\mathcal{G}|$ summiert. Die Anzahl der Monome ist gegeben durch:

$$\binom{N+|\mathcal{G}|}{N}$$

Dies ist eine obere Schranke, welche Vollständigkeit garantiert; praktisch kann Vollständigkeit bereits für wesentlich weniger Elemente existieren.

Bei der Translationsgruppe erhält man mit dim(x)= $|\mathcal{G}|$=N:

$$\binom{2N}{N}=\frac{(2N)!}{(N!)\cdot(N!)}$$

Für $N=4$ sind das $\frac{8!}{(4!)\cdot(4!)}=70$ und für $N=8$ bereits $\frac{16!}{(8!)^2}=12.870$

Orbits für Binärmuster der Dimension N=4 bzgl. zyklischer Translationen

Orbits	Muster			
O_0	$(0,0,0,0)^T$			
O_1	$(0,0,0,1)^T$	$(0,0,1,0)^T$	$(0,1,0,0)^T$	$(1,0,0,0)^T$
O_2	$(0,0,1,1)^T$	$(0,1,1,0)^T$	$(1,1,0,0)^T$	$(1,0,0,1)^T$
O_3	$(0,1,0,1)^T$	$(1,0,1,0)^T$		
O_4	$(0,1,1,1)^T$	$(1,1,1,0)^T$	$(1,0,1,0)^T$	$(1,0,1,1)^T$
O_5	$(1,1,1,1)^T$			

Translationsinvarianz bei Binärmustern der Länge N=4

Berechne aus Gründen der Vollständigkeit alle Gruppenmittel vom Grad ≤ 4. Da wir über die zyklischen Translationen mitteln, können die Monome, welche sich nur in einer zyklischen Translation unterscheiden, unberücksichtigt bleiben. Beachtet man ausserdem

$$x_i^{d_j} = x_i \quad \text{für } \forall d_j > 0,\ x_i \in \{0,1\}$$

So sind die folgenden Monome zu betrachten:

$$f_0(\mathbf{x}) = x_0$$
$$f_1(\mathbf{x}) = x_0 x_1$$
$$f_2(\mathbf{x}) = x_0 x_2$$
$$f_3(\mathbf{x}) = x_0 x_1 x_2$$
$$f_4(\mathbf{x}) = x_0 x_1 x_2 x_3$$

offensichtlich ist $f_5(\mathbf{x})$=1 von wenig praktischem Nutzen

Gruppenmittel

Aus diesen Monomen berechnen sich die folgenden Gruppemnittel:

$$\tilde{x}_0 = T(f_0(\mathbf{x})) = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\tilde{x}_1 = T(f_1(\mathbf{x})) = (x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_0)$$
$$\tilde{x}_2 = T(f_2(\mathbf{x})) = (x_0 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_0 + x_3 x_1) = 2(x_0 x_2 + x_1 x_3)$$
$$\tilde{x}_3 = T(f_3(\mathbf{x})) = (x_0 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_0 + x_3 x_0 x_1)$$
$$\tilde{x}_4 = T(f_4(\mathbf{x})) = 4 x_0 x_1 x_2 x_3$$

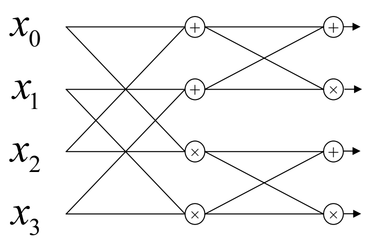
Daraus resultieren die folgenden Invarianten für die verschiedenen Orbits:

Orbits			$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
O_0	0	0	0	0	0
O_1	1	0	0	0	0
O_2	2	1	0	0	0
O_3	2	0	2	0	0
O_4	3	2	2	1	0
O_5	4	4	4	4	4

Man erkennt, dass bereits die beiden Merkmale $\tilde{x}_0$ und $\tilde{x}_1$ einen vollständigen Merkmals-raum aufspannen!

Beziehungen zur Klasse ℂT

Berechnet man Invarianten von der Klasse ℂT mit den Funktionen $f_1=a+b$ und $f_2=a\times b$ so ergibt sich für N=4:



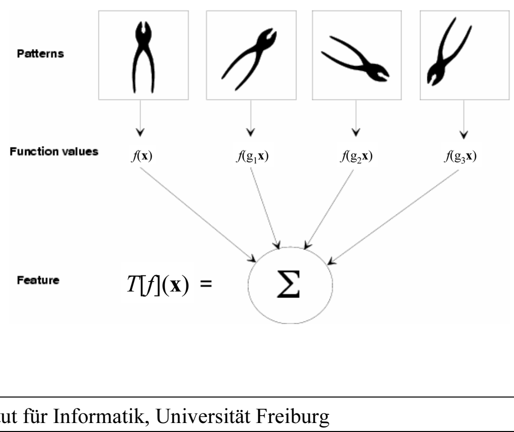
$$\tilde{x}_0 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\tilde{x}_1 = (x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_0)$$
$$\tilde{x}_2 = (x_0 x_2 + x_1 x_3)$$
$$\tilde{x}_3 = x_0 x_1 x_2 x_3$$

Dies ist aber genau eine Teilmenge von Invarianten, welche man mit der Gruppenmittelung über Monome erhalten würde, hier jedoch mit einem schnellen Algorithmus der Komplexität O(N log N) berechnet.

Invarianten durch Gruppenmittelung

Invarianten können unter Einsatz beliebiger Funktionen f durch Integration über die die Bewegungsgruppe gewonnen werden:

$$I[f](\mathbf{x}) = \int_G f(g\mathbf{x})dg$$



Integralinvarianten für die Gruppe der ebenen Bewegungen mit lokalen Funktionen

Für die zyklische ebene Bewegung gilt:

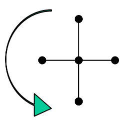
$$g(t_0, t_1, \varphi)\mathbf{x}[i, j] = \mathbf{x}[k, l]$$

mit: $$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

Alle Indizes müssen Modulo der Bilddimension verstanden werden!

$$T[f](\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi NM} \int_{t_0=0}^{N} \int_{t_1=0}^{M} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(g\mathbf{x})\, d\varphi\, dt_1 dt_0$$

Es stellt sich nun heraus, dass *f* und *g* ***vertauschbar*** sind, d.h. man führt die die i.allg. lokale Funktion mit einer Euklidschen Bewegung über das ganze Bild. Näherung der Integration durch eine Summation auf dem Pixelraster und einer Rotation um eine endliche Anzahl von Winkeln, bei bilinearer Interpolation der Zwischenwerte.



Berechnung des Monoms:

$$\begin{array}{c|c|c} & x^3_{1,0} & \\ \hline x^1_{0,-1} & x^5_{0,0} & x^2_{0,1} \\ \hline & x^2_{-1,0} & \end{array} = x^1_{0,-1} \cdot x^3_{1,0} \cdot x^5_{0,0} \cdot x^2_{-1,0} \cdot x^2_{0,1}$$