Gruppenmittel

Aus diesen Monomen berechnen sich die folgenden Gruppemnittel:

$$\tilde{x}_0 = T(f_0(\mathbf{x})) = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\tilde{x}_1 = T(f_1(\mathbf{x})) = (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_0)$$
$$\tilde{x}_2 = T(f_2(\mathbf{x})) = (x_0x_2 + x_1x_3 + x_2x_0 + x_3x_1) = 2(x_0x_2 + x_1x_3)$$
$$\tilde{x}_3 = T(f_3(\mathbf{x})) = (x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_0 + x_3x_0x_1)$$
$$\tilde{x}_4 = T(f_4(\mathbf{x})) = 4x_0x_1x_2x_3$$

Daraus resultieren die folgenden Invarianten für die verschiedenen Orbits:

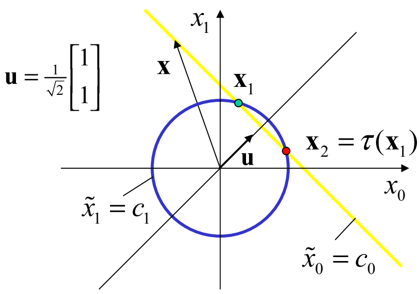
Orbits			$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
O_0	0	0	0	0	0
O_1	1	0	0	0	0
O_2	2	1	0	0	0
O_3	2	0	2	0	0
O_4	3	2	2	1	0
O_5	4	4	4	4	4

Man erkennt, dass bereits die beiden Merkmale $\tilde{x}_0$ und $\tilde{x}_1$ einen vollständigen Merkmals-raum aufspannen!

Geometrische Veranschaulichung der Gruppenmittel: *Schnitt von Mannigfaltigkeiten*

Gruppenmittel für die *Translation* bei N=2:

Orbit: $O\left(\underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}\right) = \left\{\underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_2}\right\}$ Spiegelung an 1. Winkelhalbierenden



1. geometrischer Ort mit linearen Gruppenmitteln $f_0 = x_0$:

$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 = \sqrt{2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0$ (Gerade $\perp$ auf $\mathbf{u}$)

noch mehrdeutig!

2. geometrischer Ort mit quadratischen Gruppenmitteln $f_1 = x_0^2$:

$\tilde{x}_1 = x_0^2 + x_1^2 = c_1$ (Kreis)

Schnittpunkt beider geometrischer Örter ergibt genau die Vektoren der Äquivalenzklasse:

$\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \end{bmatrix}$ ist vollständig!

Eine weitere *lineare* Invariante löst nicht das Problem!

Wählt man z.B. eine andere Multilinearform der Art $f_1 = 2x_0 + \mathrm{x}_1$ so erhält man nach der Gruppenmittelung: $\tilde{x}_1 = (2x_0 + \mathrm{x}_1) + (2x_1 + \mathrm{x}_0) = 3(x_0 + x_1)$

Diese Invariante ist aber nicht von neuer Qualität im Vergleich zu:

$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 =\sim \tilde{x}_1$

Wahl einer alternativen Mannigfaltigkeit 2. Grades

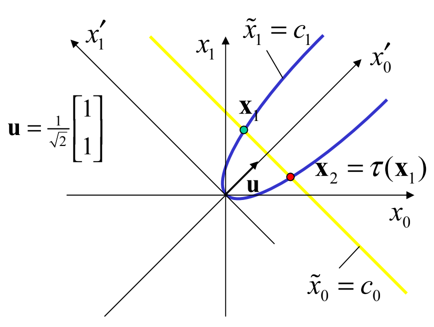
1. geometrischer Ort mit linearen Gruppenmitteln $f_0 = x_0$:

$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 = \sqrt{2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0$ (Gerade $\perp$ auf $\mathbf{u}$) noch mehrdeutig!

2. geometrischer Ort mit Parabel symmetrisch zur x_0'-Achse: $x_0' = k x_1'^2$

und mit $\begin{aligned} x_0' &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_1) \\ x_1' &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_0) \end{aligned}$ folgt daraus: $x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 - \tfrac{1}{k}(x_0 + x_1) = 0$

Dies kann als quadratisches Gruppenmittel über $f_1 = \tfrac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2) - x_0x_1 - \tfrac{1}{2k}x_0$ erzeugt werden.



$$\begin{array}{r} \tfrac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2) - x_0x_1 - \tfrac{1}{2k}x_0 \\ \tfrac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2) - x_0x_1 - \tfrac{1}{2k}x_1 \\ \hline \tilde{x}_1 = x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 - \tfrac{1}{k}(x_0 + x_1) \end{array}$$

Schnittpunkt beider geometrischer Örter ergibt genau die Vektoren der Äquivalenzklasse:

$\Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \end{bmatrix}$ ist vollständig!

Gruppenmittel für die Äquivalenzklasse zyklischer Translationen mit N=3

Orbit: $O\left(\underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}\right) = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_3} \right\}$ Rotation an der 1. Raumdiagonalen um $2\pi/3$

1. geometrischer Ort mit linearen Gruppenmitteln $f_0 = x_0$:

$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 + x_2 = \sqrt{3}\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0$ (Ebene $\perp$ auf $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1\ 1\ 1]^T$)

2. geometrischer Ort mit quadratischen Gruppenmitteln $f_1 = x_0^2$:

$\tilde{x}_1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = c_1$ (Kugel) $\tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1$ ergibt Kreis

3. geometrischer Ort:

a) $f_2 = x_0 x_1 \Rightarrow$ Gruppenmittel: $\tilde{x}_2 = x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0 = c_2$

$\tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2$ ergibt 6 Punkte (auch invariant gegenüber Spiegelung!)

b) erst die Wahl einer asymmetrischen Funktion führt zur Vollständigkeit:

$f_2 = x_0^2 x_1 \Rightarrow$ Gruppenmittel: $\tilde{x}_2 = x_0^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_0 = c_2$

$\tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2$ ergibt genau die 3 Punkte der Äquivalenzklasse! Matlab-Demo: InvariR3.m

Schnitt von Mannigfaltigkeiten

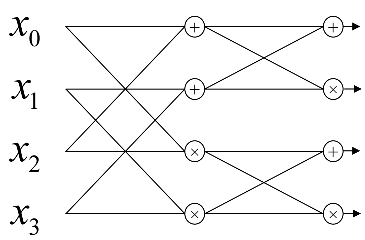
$$\begin{array}{lll} \tilde{x}_0(x_0,x_1,x_2) = c_0 & \Rightarrow \text{ erste Hyperfläche} & g_0(x_0,x_1,x_2,c_0) = 0 \\ \tilde{x}_0(x_0,x_1,x_2) = c_0 & \Rightarrow \text{ erste Hyperfläche} & g_0(x_0,x_1,x_2,c_0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$g_0 \cap g_1 \cap g_2 \cdots$$

- Die notwendige Bedingung garantiert, dass alle Mannigfaltigkeiten durch die Punkte der Äquivalenzklasse gehen.
- Nimmt man mehr und mehr unabhängige Invarianten hinzu, so wird in der Regel die Schnittmenge verkleinert und damit steigt der Grad der Vollständigkeit (die Hyperflächen schneiden sich in immer weniger Punkten).

Beziehungen zur Klasse $\mathbb{C}$T

Berechnet man Invarianten von der Klasse $\mathbb{C}$T mit den Funktionen $f_1 = a+b$ und $f_2 = a \times b$ so ergibt sich für N=4:



$$\tilde{x}_0 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\tilde{x}_1 = (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_0)$$
$$\tilde{x}_2 = (x_0x_2 + x_1x_3)$$
$$\tilde{x}_3 = x_0x_1x_2x_3$$

Dies ist aber genau eine Teilmenge von Invarianten, welche man mit der Gruppenmittelung über Monome erhalten würde, hier jedoch mit einem schnellen Algorithmus der Komplexität O(N log N) berechnet.

Verbesserung der Trenneigenschaften (Grad der Vollständigkeit) durch Vergrößerung des Musterraumes mit Hilfe schwach kommutativer Vorverarbeitungs-abbildungen ω_i

Definition der schwachen Kommutativität: Eine Abbildung $\omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ des Musterraumes $\mathcal{X}$ auf sich heißt schwach kommutativ, falls zu jedem $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ und $g_1 \in \mathcal{G}$ ein mit der folgenden Eigenschaft existiert:

$$\omega g_1 \mathbf{x} = g_2 \omega \mathbf{x}$$

Lemma: Sei $\omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ eine schwach kommutative Abbildung und T eine invariante Abbildung, dann bilden $T \circ \omega$ ebenfalls Invarianten.

Beweis: Für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $g_1 \in \mathcal{G}$ gilt:

$$(T \circ \omega)(g_1 \mathbf{x}) = T(\omega g_1 \mathbf{x}) = T(g_2 \omega \mathbf{x}) = T(\omega \mathbf{x}) = (T \circ \omega)(\mathbf{x})$$

Betrachtet werden wiederholte (iterative) Anwendungen von ω :

$T \circ \omega$, $T \circ \omega \circ \omega$, …

Invarianten für die Gruppe der zyklischen Translationen für Binärmuster der Dimension N=16

Man erhält $2^{16} = 65536$ unterschiedliche Binärmuster.

Mit Hilfe der Pólya-Theorie läßt sich zeigen, daß es genau die folgende Zahl von unterscheidbaren Orbits oder Äquivalenzklassen gibt:

$$A_B = \frac{1}{N} \sum_{k|N} \varphi(k) 2^{\frac{N}{k}} \Bigg|_{N=16} = 4116$$

Die Summe geht über alle Teiler k von N. φ ist die Eulersche φ-Funktion.

Verbesserung der Trenneigenschaften für Transformationen aus der Klasse $\mathbb{C}T$

Transformationen	RT	(+,x)	BT	$\|F\|$
Separierbare Muster	225	230	168	1876
Δ	0,055	0,056	0,041	0,456

Transformationen	separierbare Muster	Δ
RT	225	0,05
RT•A1	3682	0,89
RT•A1•A1	4116	1,00
RT•A2	4088	0,99
RT•A2•A2	4116	1,00
RT•A3	4116	1,00

Schwach kommutative Abbildungen

$$(A_1 x)_i = x_i + \left(\sum_{i=0}^{15} x_i\right)(2x_{(i+1)\,\mathrm{mod}\,16} + x_{(i+2)\,\mathrm{mod}\,16})^2$$

$$(A_2 x)_i = x_i + (x_{(i+1)\,\mathrm{mod}\,16} + 2x_{(i+2)\,\mathrm{mod}\,16} + 3x_{(i+3)\,\mathrm{mod}\,16})^2$$

$$(A_2 x)_i = x_i + (x_{(i+1)\,\mathrm{mod}\,16} + 2x_{(i+2)\,\mathrm{mod}\,16} + 3x_{(i+3)\,\mathrm{mod}\,16} + 4x_{(i+4)\,\mathrm{mod}\,16})^2$$