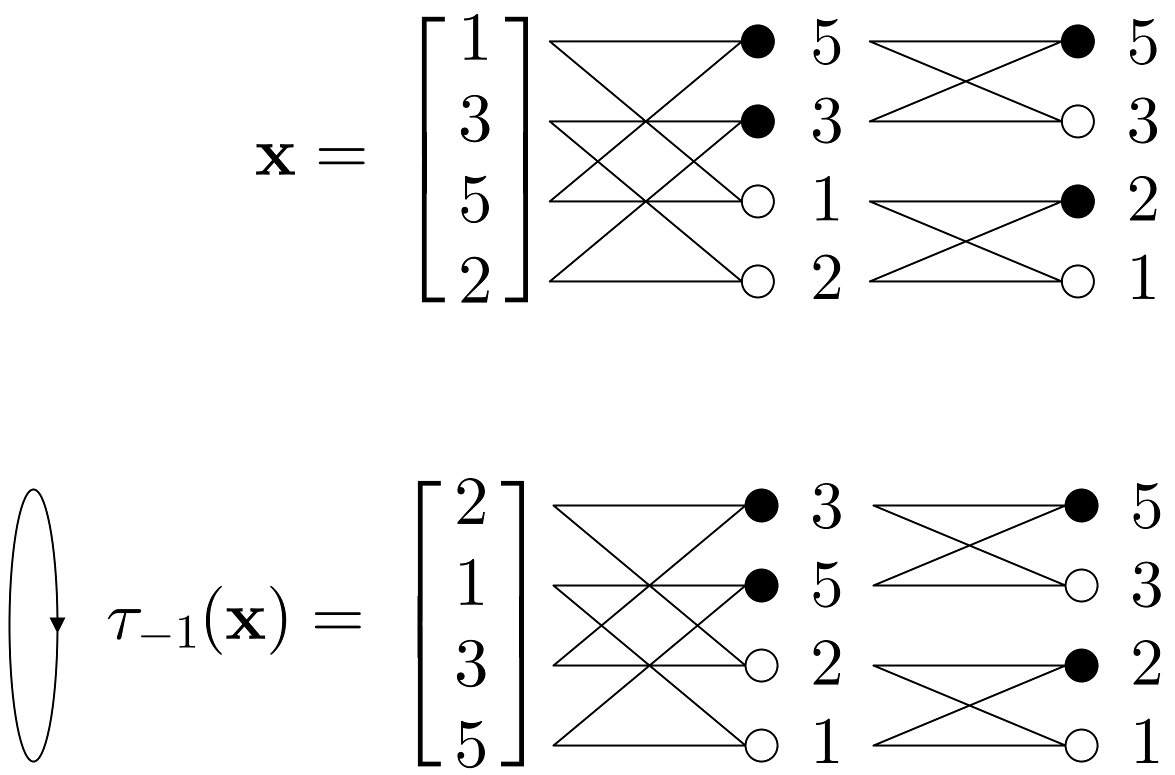
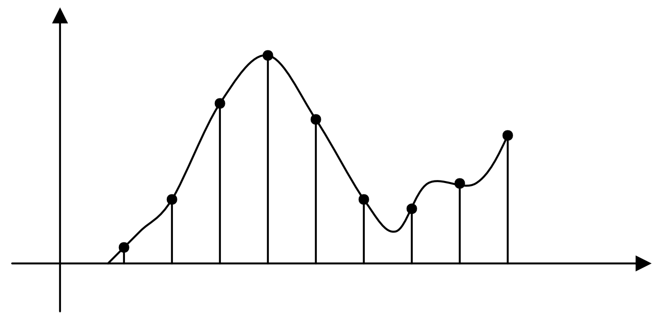
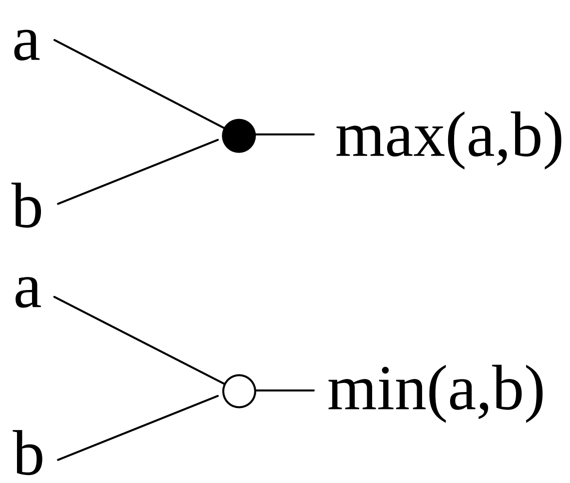
# Kapitel 3

## Lageinvariante Graubilderkennung

# Eindimensionale translationsinvariante Merkmale





# Translationsinvarianz des Leistungsspektrums der Fouriertransformierten sowie der Autokorrelationsfunktion

Der Betrag der diskreten Fouriertransformierten (DFT, siehe DBV I) oder auch des Leistungsspektrums (Betragsquadrat) ist translationinvariant:

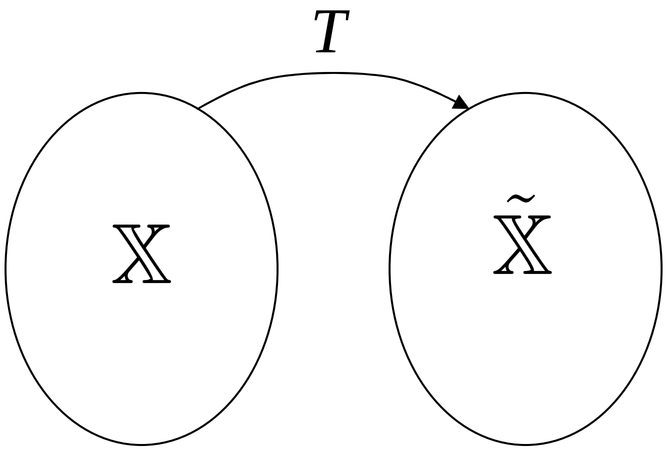
$$\text{AKF:}\quad \mathbf{z} = \mathbf{x} \# \mathbf{x} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{x}) \circ \mathcal{F}^{*}(\mathbf{x})) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{x}}^{*}) = \mathcal{F}^{-1}(|\tilde{\mathbf{x}}|^{2})$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \tau_{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4+j \\ 1 \\ -4-j \end{bmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1-4j \\ -1 \\ -1+4j \end{bmatrix}$$

$$|\tilde{\mathbf{x}}| = |\tilde{\mathbf{y}}| = \begin{bmatrix} 11 \\ 4,12 \\ 1 \\ 4,12 \end{bmatrix}$$

# Aufwand einer allgemeinen Abbildung vom Vektorraum $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ (linear oder nichtlinear)

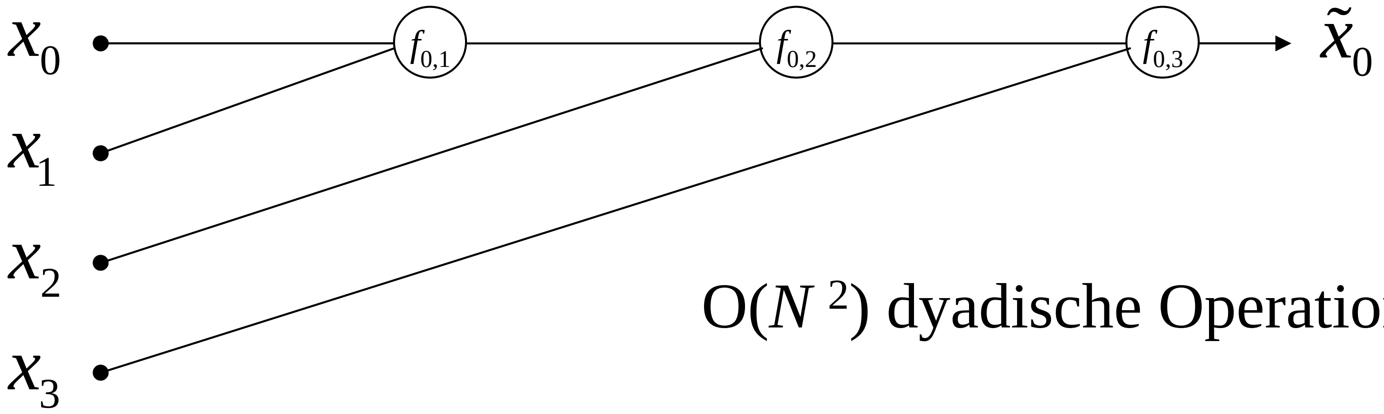
$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x}) \quad \text{mit:} \quad \dim(\mathbf{x}) = \dim(\tilde{\mathbf{x}}) = N}$$




Für die Abbildung T werden $N^2$ zweistellige Verknüpfungen benötigt, wenn jeder Eingangswert in aller Allgemeinheit in die Berechnung eines jeden Ausgangswertes eingehen soll.

Dies wird z.B. in dem folgenden Berechnungsschema deutlich:

$$\tilde{x}_j = f_{j,N-1}(\cdots f_{j,3}(f_{j,2}(f_{j,1}(x_0, x_1), x_2), x_3)\cdots, x_{N-1})$$




O($N^2$) dyadische Operationen

# Z.B. die *lineare* Vektorraumoperation:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{30} & w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_0 = \overbrace{\underbrace{(\underbrace{(w_{00} \cdot x_0 + w_{01} \cdot x_1)}_{f_{01}(x_0, x_1)} + w_{02} \cdot x_2)}_{f_{02}(\bullet, x_2) = (\bullet) + w_{02} \cdot x_2} + w_{03} \cdot x_3}^{f_{03}(\bullet, x_3)}$$

Dabei wird eine Addition+Multiplikation als eine Operation gezählt.

# Eine Klasse schneller, nichtlinearer, translationsinvarianter Transformationen ℂT

## durch Rekursive Faktorisierung der Transformation

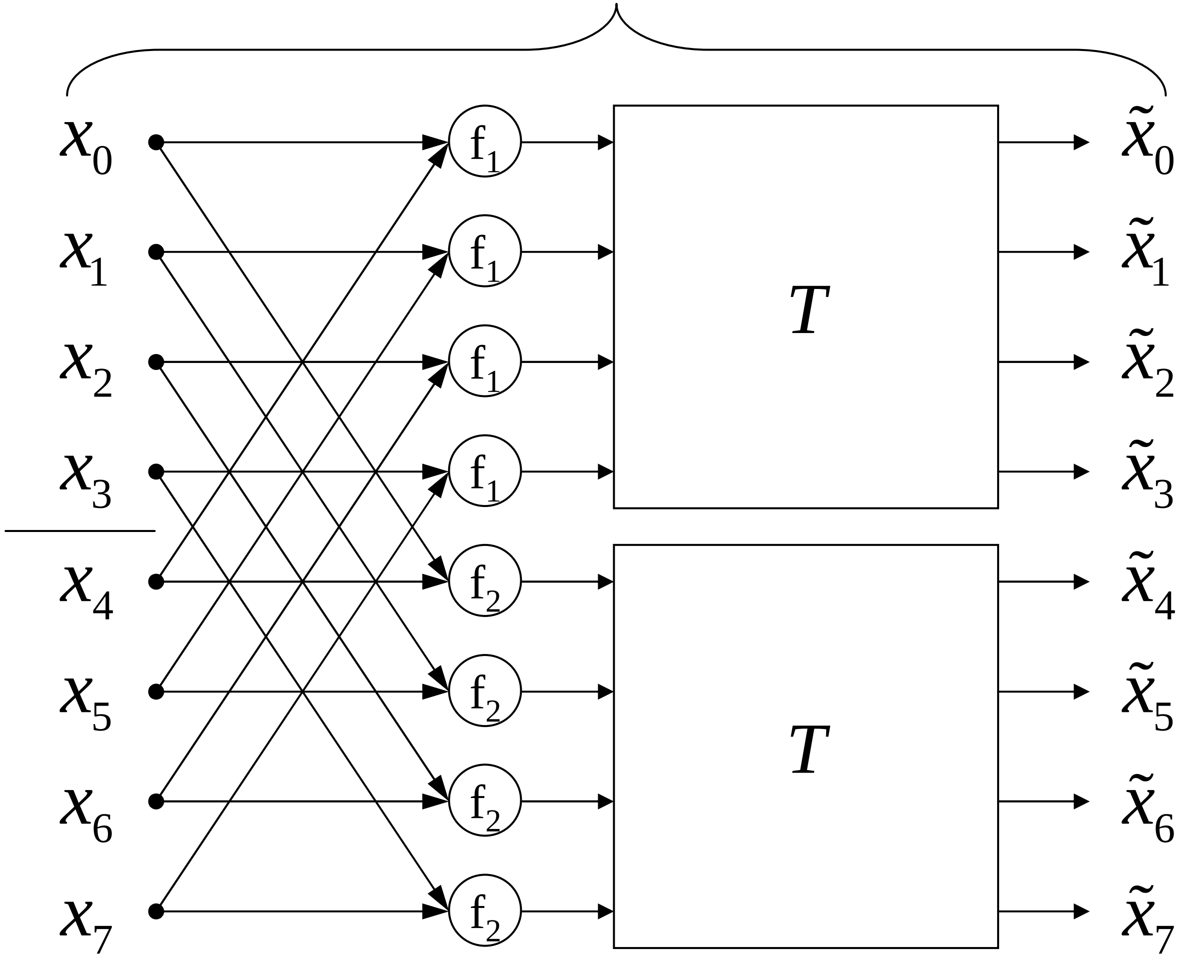
Lässt sich die Transformation hingegen faktorisieren, d.h. kann man die Transformation der Dimension $N$ auf zwei Transformationen der halben Dimension und einem Verschmelzungsschritt mit linearem Aufwand zurückführen, so erhält man:

$$\tilde{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1(\mathbf{x}_{1|2}, \mathbf{x}_{2|2})} \\ \widetilde{f_2(\mathbf{x}_{1|2}, \mathbf{x}_{2|2})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}_{1|2}^{(1)}} \\ \widetilde{\mathbf{x}_{2|2}^{(1)}} \end{bmatrix}$$

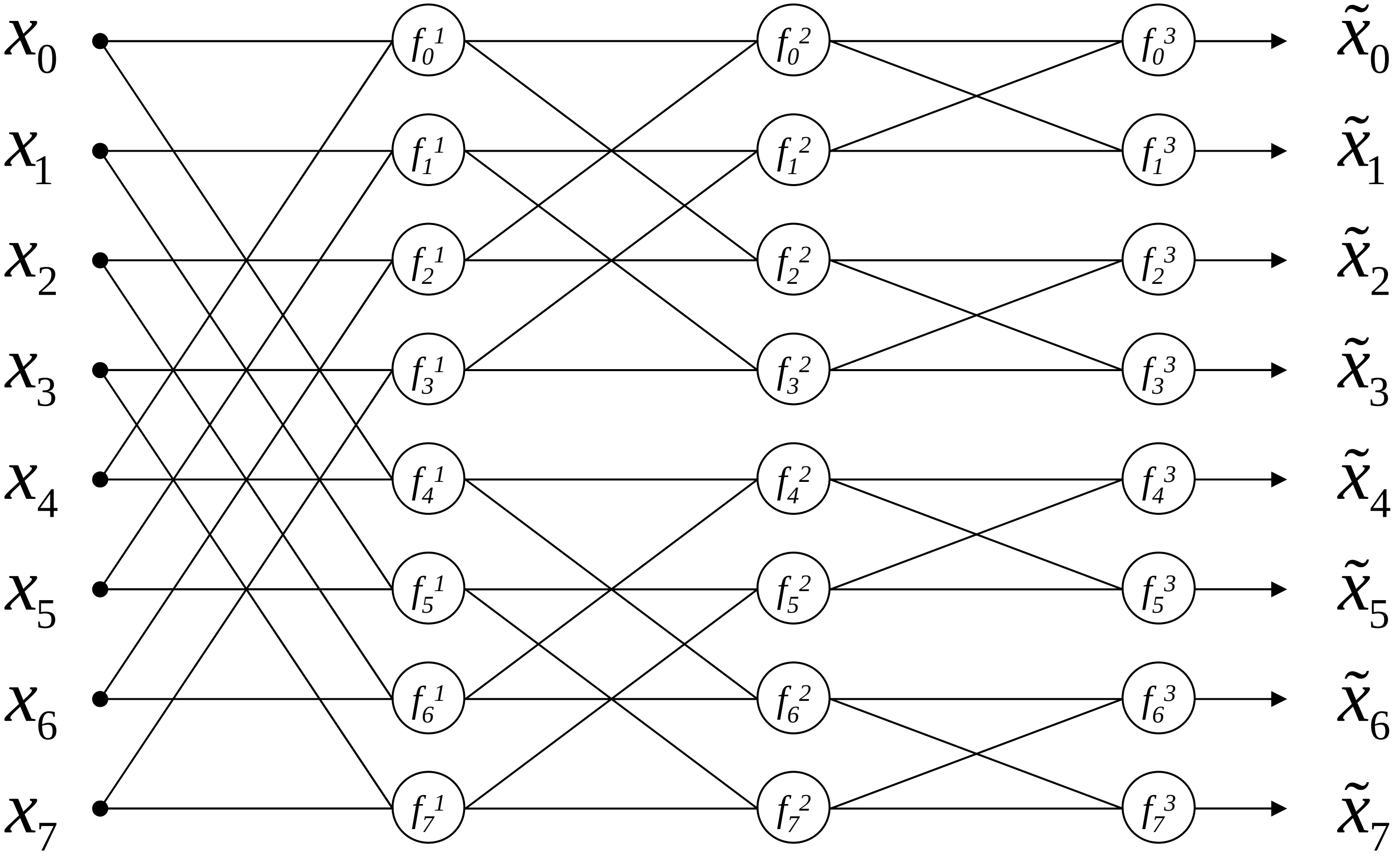
Dabei bedeutet $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ die Anwendung der zweistelligen Verknüpfung $f$ auf korrespondierende Elemente der beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

# Rekursive Faktorisierung der Transformation $T$

$$\tilde{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \overbrace{f_1(\mathbf{x}_{1|2}, \mathbf{x}_{2|2})} \\ \overbrace{f_2(\mathbf{x}_{1|2}, \mathbf{x}_{2|2})} \end{bmatrix}$$



# Auflösung der Rekursion: Butterfly- oder In-Place-Signalflußgraph der schnellen Transformation $T$



# Berechnungskomplexität

Durch die Faktorisierung ergibt sich ein Aufwand für $N=2^n$ von:

$$(1\cdot N + 2\cdot N/2 + 4\cdot N/4 + \cdots N/2\cdot 2) = N\cdot ld(N) = N\cdot n \quad \text{Operationen}$$

D.h. ein Aufwandsgewinn von: $$\frac{N^2}{N\log_2 N} = \frac{N}{\log_2 N}$$

Für $N=2^{10}=1024$ ergibt sich bereits ein Gewinn von $1024/10\approx 100$.

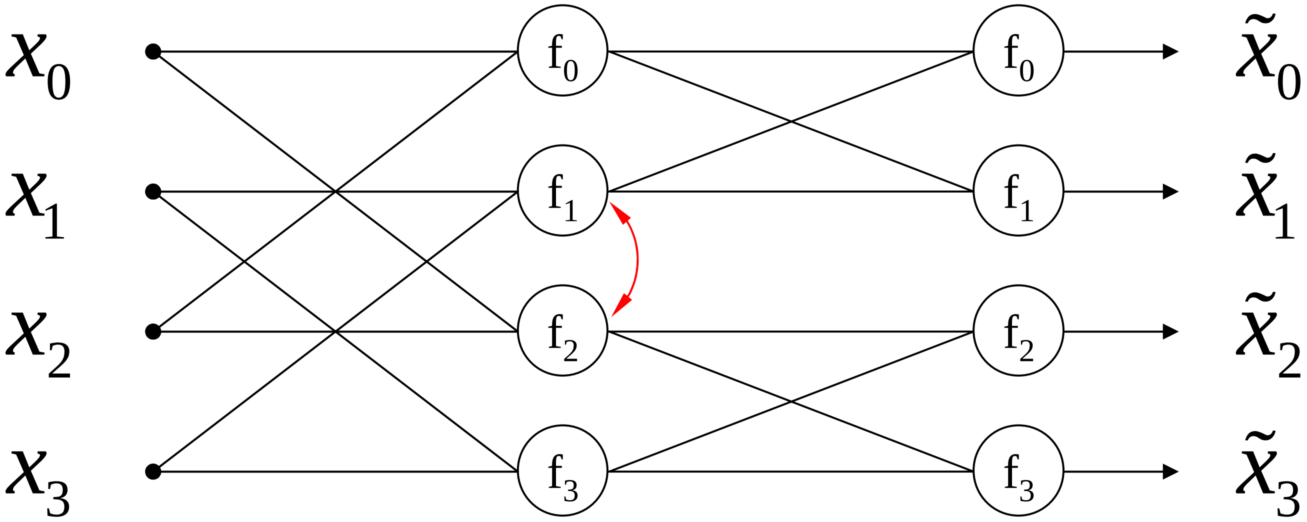
# Laufzeitgewinn

| $N$ | $N^2$ | $N \text{ ld } N$ | Gewinn: $\frac{N^2}{N \cdot \text{ld } N} = \frac{N}{\text{ld } N}$ |
|---|---|---|---|
| 100 | 10.000 | 664 | 15 |
| 500 | 250.000 | 4.483 | 55 |
| 1.000 | $10^6$ | $10^4$ | 100 |
| $10^3 \cdot 10^3 = 10^6$ | $10^{12}$ | $20 \cdot 10^6$ | 50.000 |

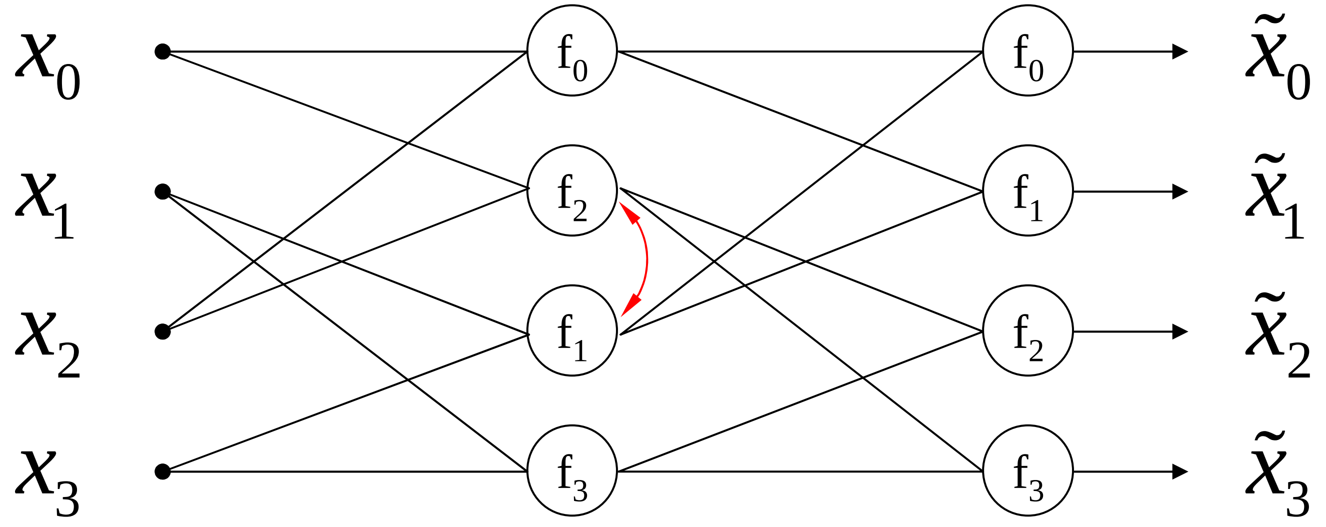
# Konsequenzen der Faktorisierung

1. Schneller Algorithmus mit $N \log_2 N$ zweistelligen Verknüpfungen
2. In-Place-Algorithmus
3. Modulare Nutzung
   - Hardware: modularer Aufbau aus Bausteinen kleinerer Dimension
   - Software: modulare Nutzung kleinerer Teiltransformationen z.Bsp. bei beschränktem Hauptspeicher
4. Rekursion sehr leistungsfähig für Beweisführung (vollständige Induktion)

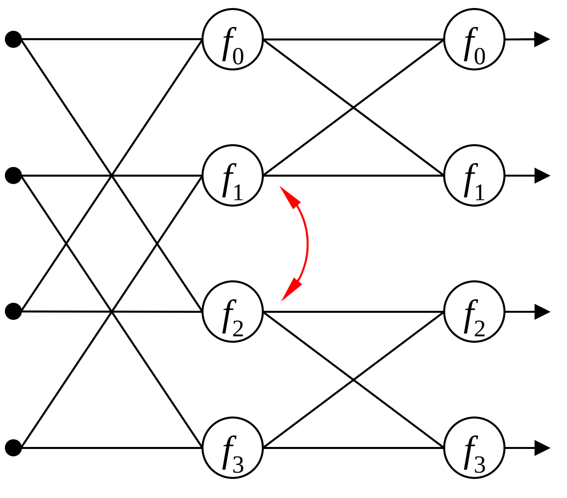
# Übergang zum homogenen Graphen durch Permutation der Knoten

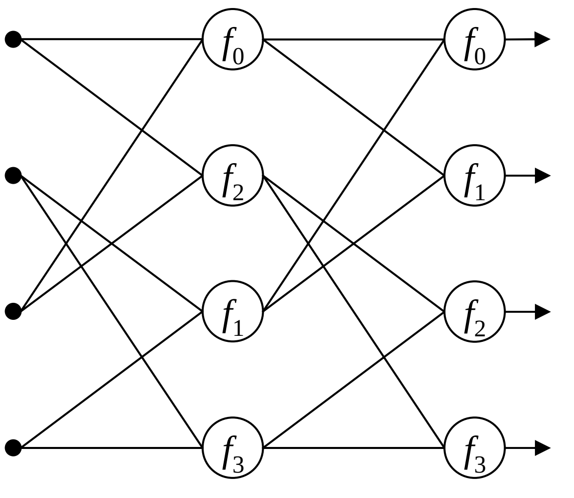


# Übergang zum homogenen Graphen durch Permutation der Knoten



# Übergang vom De Bruijn-Graph zum homogenen Graphen



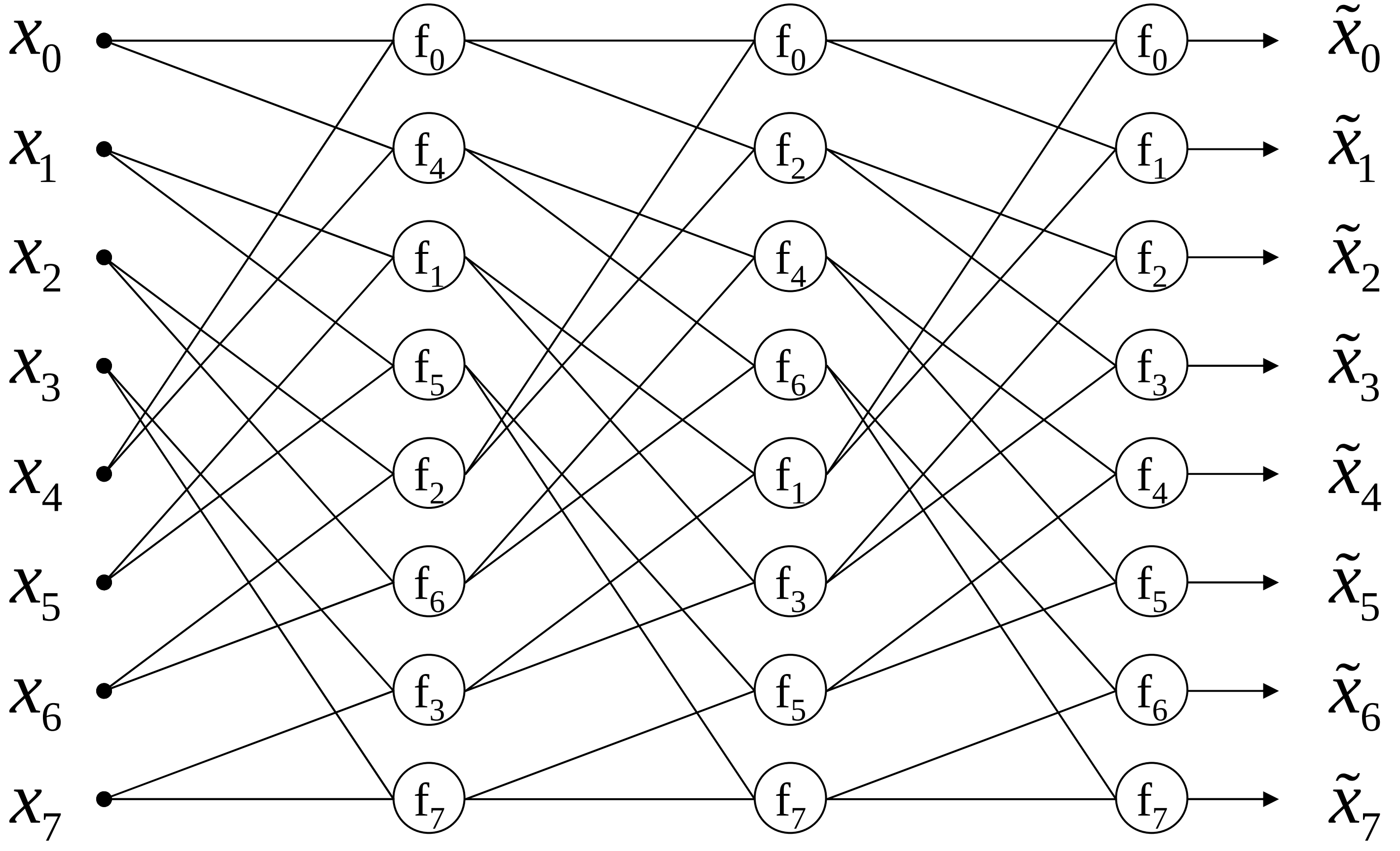
# Die Umwandlung des Butterfly- in den homogenen Graphen für eine allgemeine Basis-B Faktorisierung durch Permutation der Knoten

Die Verknüpfung $f_{\mathrm{r}}$ von Schicht $j$ des Butterfly-Graphen wandert an die Stelle $r'$, mit:

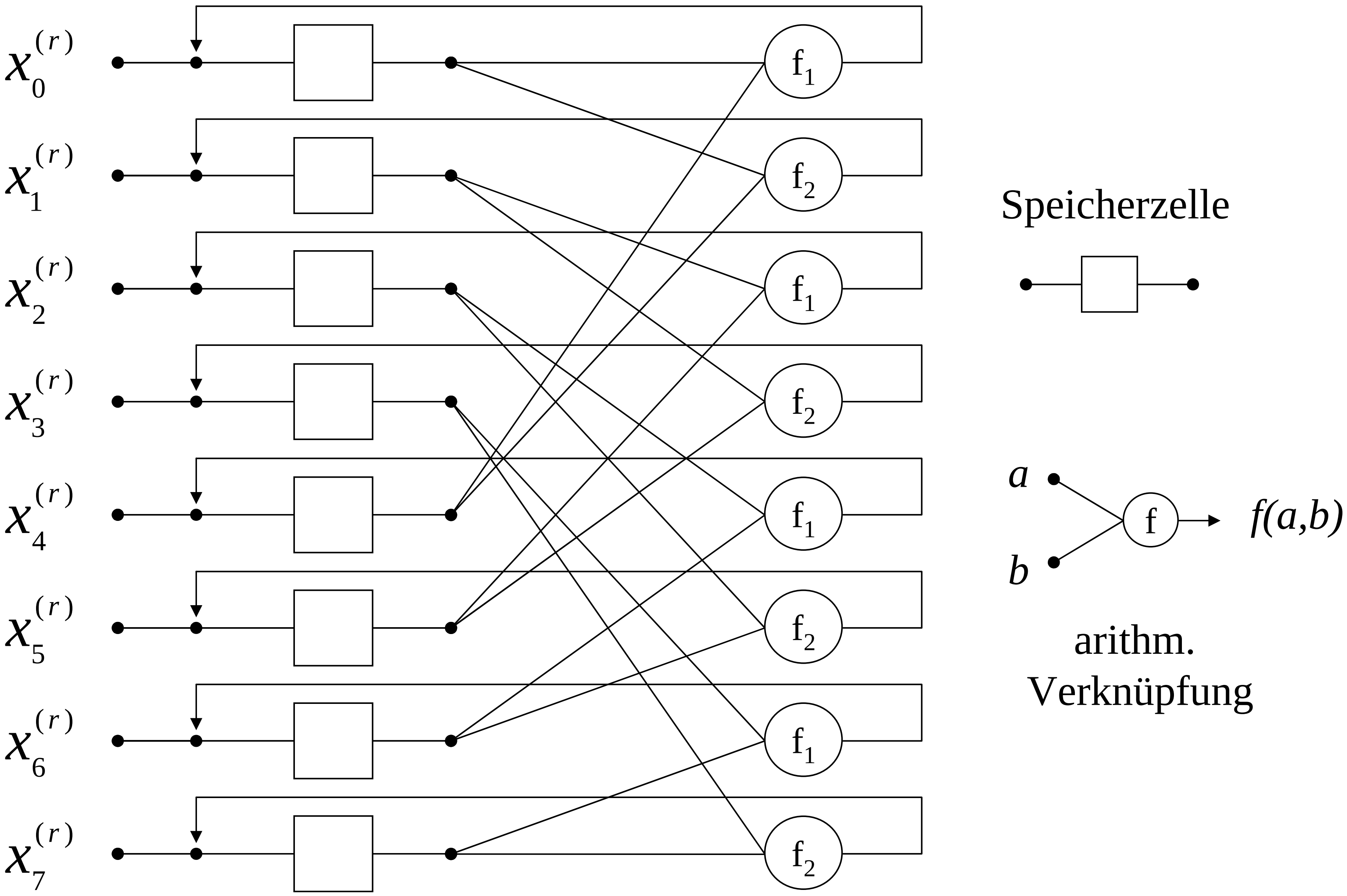
$$r'^{(j)} = \tau_j(r_B^{(0)}) = \tau_1(r_B^{(j-1)})$$

$\tau_j$ bezeichnet $j$ zyklische Verschiebungen nach links von $r$, dargestellt im Basis-B-Zahlensystem mit $n=\log_B N$ Stellen

# Homogener oder de Bruijn-Signalflußgraph der schnellen Transformation *T*



# Allgemeiner paralleler Signalprozessor ($N$=8)



# Die Transformation T in APL

```
[0] Z←T X;N
[1] ⍝ T REKURSIV (mit Bit-Reversal)
[2] →(1>N←(,⍴Z←X)÷2)/0
[3] Z←,(T((N↑X) F1 (N↓X))),[1.5](T((N↑X) F2 (N↓X)))
```

```
[0] Z←T X;I;LN;NH
[1] ⍝ T ITERATIV
[2] LN←1+2⍟NH←(⍴Z←X)÷2
[3] I←1
[4] M:Z←,((NH↑Z) F1 (NH↓Z)),[1.5]((NH↑Z) F2 (NH↓Z))
[5] →(LN≥I←I+1)/M
```

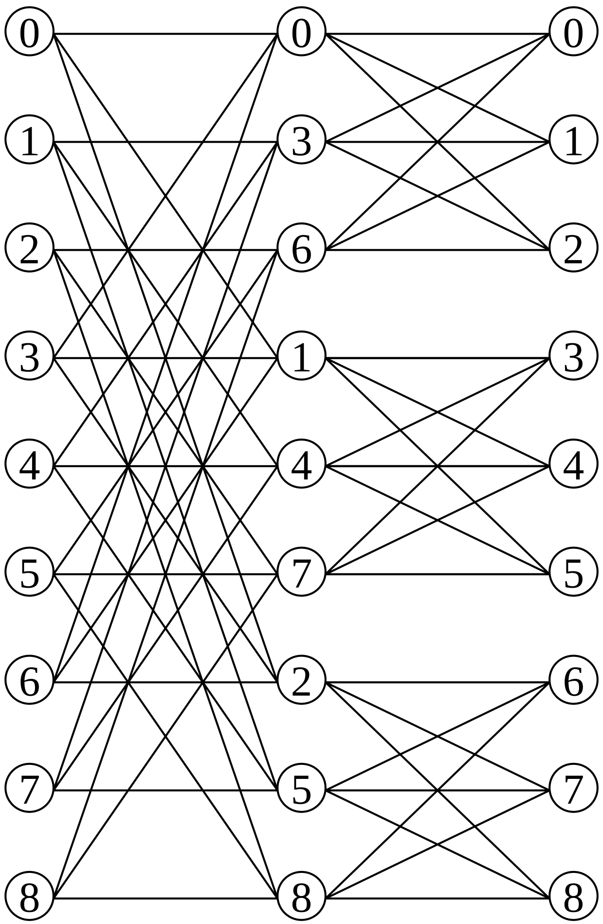
# Rekursive Basis-3 Faktorisierung der Transformation *T*

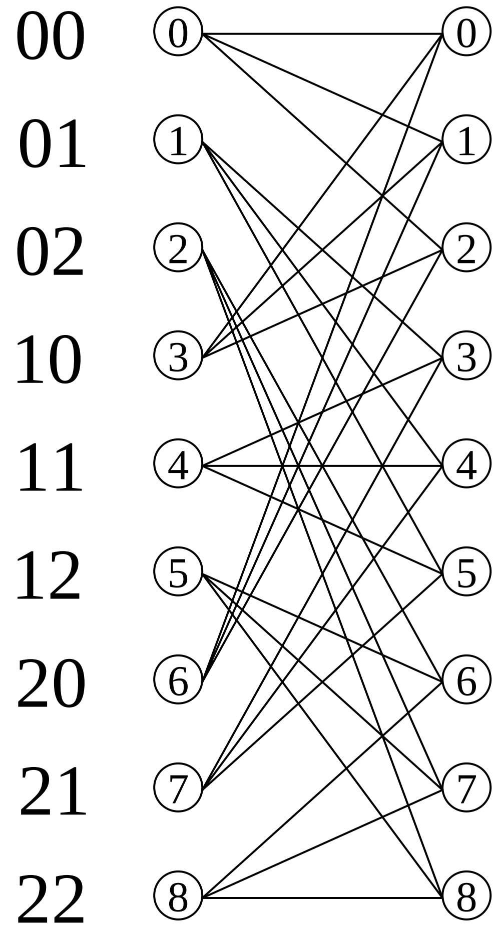
$$\tilde{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1(\mathbf{x}_{1|3}, \mathbf{x}_{2|3}, \mathbf{x}_{3|3})} \\ \widetilde{f_2(\mathbf{x}_{1|3}, \mathbf{x}_{2|3}, \mathbf{x}_{3|3})} \\ \widetilde{f_3(\mathbf{x}_{1|3}, \mathbf{x}_{2|3}, \mathbf{x}_{3|3})} \end{bmatrix}$$

Dabei bedeutet $f(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ die Anwendung der dreistelligen Verknüpfung $f$ auf korrespondierende Elemete der drei Vektoren **x**,**y** und **z**.

Übung: Beweis der Translationsinvarianz mit symmetrischer Funktion $f$(a,b,c), z.Bsp. (a·b·c) und (a+b+c).

# Die beiden kanonischen Verarbeitungsgraphen für eine Basis-3-Faktorisierung






Nach mindestens ($\log_B N$) Schichten, geht jedes Eingangselement $\boldsymbol{x}_i$ in die Berechnung eines jeden Ausgangselementes $\tilde{x}_j$ ein!

# Die Klasse schneller, nichtlinearer, translationsinvarianter Transformationen $\mathbb{C}$T

Die Translationsinvarianz erhält man dadurch, dass man für $f_1$ und $f_2$ zweistellige ***kommutative*** Verknüpfungen fordert:

$$f_{1,2}(a,b) = f_{1,2}(b,a)$$

Beispiele:

| | RT | QT | MT | BT |
|---|---|---|---|---|
| $f_1(a,b)$ | $a+b$ | $a+b$ | $\max(a,b)$ | $a \underset{n}{\wedge} b$ |
| $f_2(a,b)$ | $\lvert a-b \rvert$ | $(a-b)^2$ | $\min(a,b)$ | $a \underset{n}{\vee} b$ |
| definiert für: | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{I}_2$ |

# Beweis der Translationsinvarianz für die Klasse $\mathbb{C}$T

Beweisidee: eine zyklische Permutation der Länge N kann in zwei zyklische Permutationen der halben Länge zerlegt werden mit einer anschließenden Permutation der Elemente 0 und **N**/2:

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N/2-1 \\ \hdashline N/2 \\ N/2-1 \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N/2-1 \\ \hdashline N/2 \\ N/2-1 \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix} +
$$

$$
\tau_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \tau_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \tau_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} +
=
\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} +
$$

# Beweis der Translationsinvarianz für die Klasse $\mathbb{C}T$

Satz: Für die Klasse $\mathbb{C}T$ gilt: $\widetilde{\tau_1(\mathbf{x})} = \tilde{\mathbf{x}}$

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion. Aufgrund der Kommutativeigenschaft der beiden Funktionen $f_1$ und $f_2$ ergibt sich die Behauptung für einen festen Wert von $N$=2, nämlich:

$$\widetilde{\tau_1(\mathbf{x})} = \widetilde{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1(x_1, x_0)} \\ \widetilde{f_2(x_1, x_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1(x_0, x_1)} \\ \widetilde{f_2(x_0, x_1)} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}$$

Der Induktionsschluss wird durch den Übergang von $N/2$ auf $N$ ((n-1) $\rightarrow$n ) geführt.
Die Induktionsvoraussetzung lautet somit:

$$\widetilde{\tau_1(\mathbf{x}_{1|2}^{(1)})} = \widetilde{\mathbf{x}_{1|2}^{(1)}}$$

$$\widetilde{\tau_1(\mathbf{x}_{2|2}^{(1)})} = \widetilde{\mathbf{x}_{2|2}^{(1)}}$$

Für die Dimension N ergibt sich:

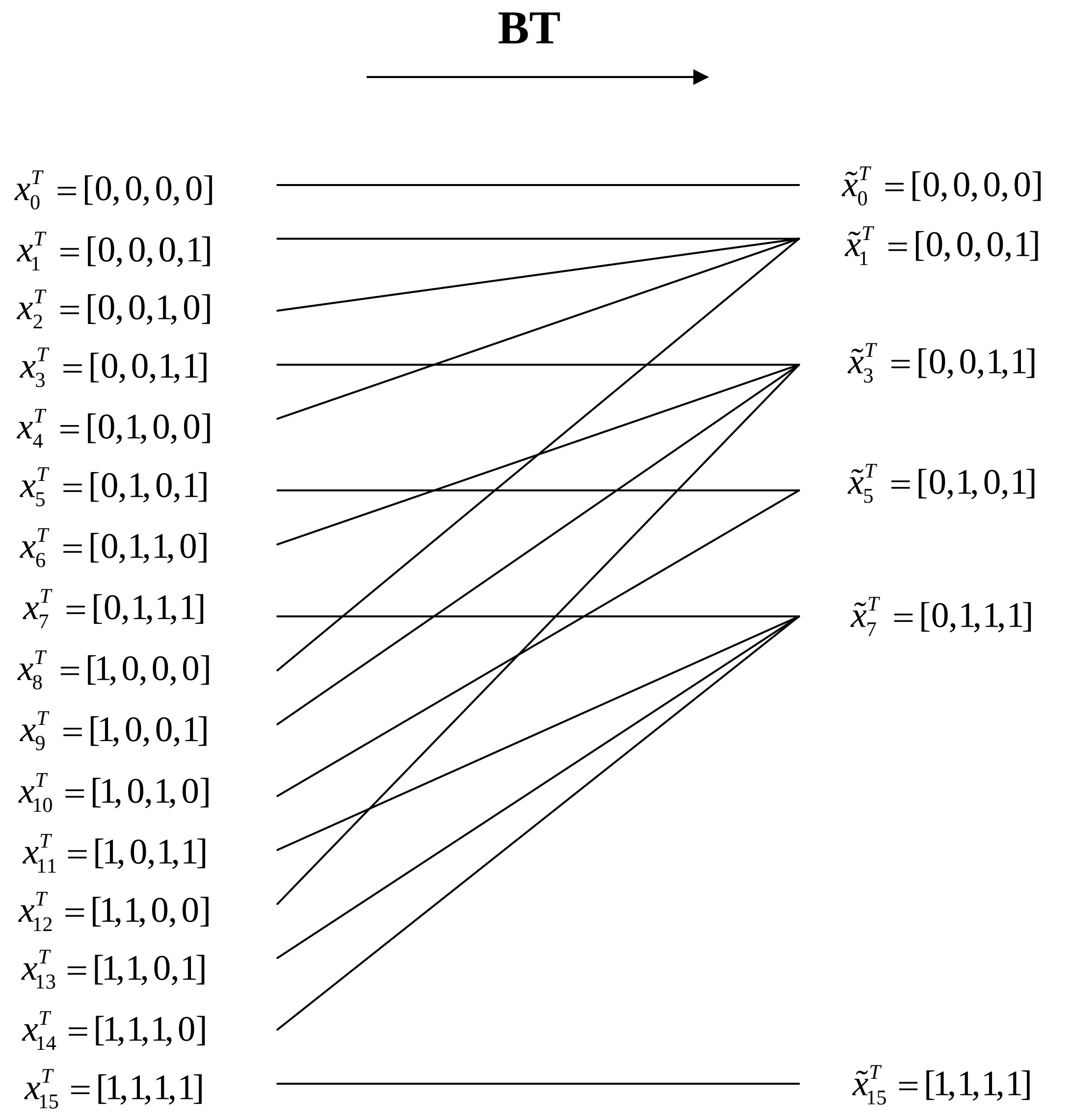
$$\widetilde{\tau_1(\mathbf{x})} = \widetilde{\begin{bmatrix} x_{N-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N/2-2} \\ \hline x_{N/2-1} \\ x_{N/2} \\ x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_{N-2} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \widetilde{f_1\begin{bmatrix} x_{N-1}, x_{N/2-1} \\ x_0, x_{N/2} \\ x_1, x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_{N/2-2}, x_{N-2} \end{bmatrix}} \\ \widetilde{f_2\begin{bmatrix} x_{N-1}, x_{N/2-1} \\ x_0, x_{N/2} \\ x_1, x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_{N/2-2}, x_{N-2} \end{bmatrix}} \end{bmatrix} \overset{f_1, f_2 \text{ kommutativ}}{=} \begin{bmatrix} \widetilde{f_1\begin{bmatrix} \color{red}{x_{N/2-1}, x_{N-1}} \\ x_0, x_{N/2} \\ x_1, x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_{N/2-2}, x_{N-2} \end{bmatrix}} \\ \widetilde{f_2\begin{bmatrix} \color{red}{x_{N/2-1}, x_{N-1}} \\ x_0, x_{N/2} \\ x_1, x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_{N/2-2}, x_{N-2} \end{bmatrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\tau_1(\mathbf{x}_{1|2}^{(1)})} \\ \widetilde{\tau_1(\mathbf{x}_{2|2}^{(1)})} \end{bmatrix} \overset{\text{nach Vor.}}{=} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}_{1|2}^{(1)}} \\ \widetilde{\mathbf{x}_{2|2}^{(1)}} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}$$

qed.

Damit gilt insbesondere auch für 2 oder $k$ Translationen:

$$\widetilde{\tau_2(\mathbf{x})} = \widetilde{\tau_1(\tau_1(\mathbf{x}))} = \widetilde{\tau_1(\mathbf{x})} = \tilde{\mathbf{x}}$$

bzw. auch: $\widetilde{\tau_k(\mathbf{x})} = \tilde{\mathbf{x}}$




B-Transformation aller eindimensionalen Binärmuster, für $N$=4
(Vollständigkeit der Abbildung für $N$=4 !)

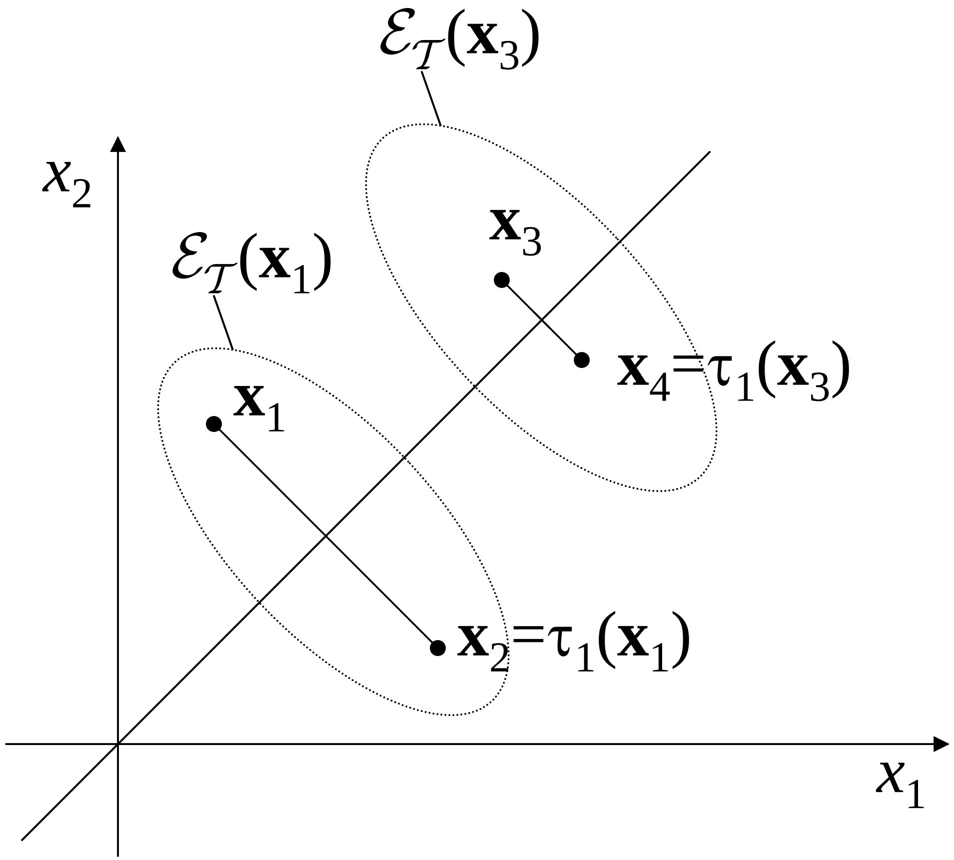
# Diskussion der Eigenschaften der R-Transformation

Für die R-Transformation gilt:

$$f_1(a,b) = a + b$$
$$f_2(a,b) = \left|a - b\right|$$

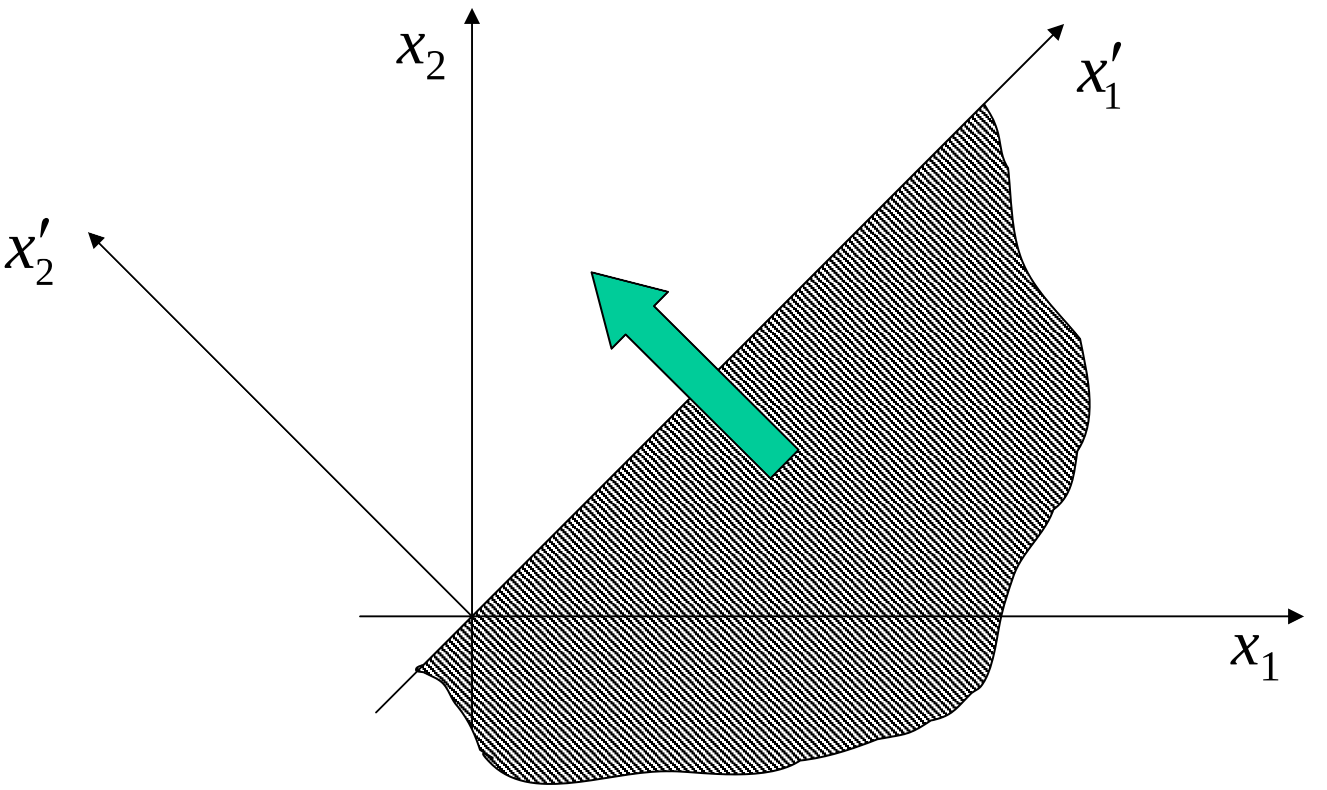
# Geometrische Interpretation der R-Transformation für den zweidimensionalen Euklidschen Raum $\mathbb{R}^2$

Für den zweidimensionalen Euklidschen Raum gibt es eine einfache geometrische Interpretation der Wirkung der R-Transformation. Die Äquivalenzklasse erhält man durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.



# Invarianz durch Drehung des Koordinatensystems um 45° und Faltung der unteren Halbebene auf die obere

Für den zweidimensionalen Euklidschen Raum gibt es eine einfache geometrische Interpretation der Wirkung der R-Transformation. Die Äquivalenzklasse erhält man durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.



# Drehung des Koordinatensystems um 45° und Faltung der unteren Halbebene auf die obere

Drehung um 45°:

$$x_1' = x_1 \cos(\pi/4) + x_2 \sin(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x_1 + x_2)$$

$$x_2' = -x_1 \sin(\pi/4) + x_2 \cos(\pi/4) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(x_1 - x_2)$$

Faltung auf die obere Halbebene durch $x_2' \to |x_2'|$ .Verzichtet man außerdem auf die Normerhaltung der Transformation, so erhält man:

$$\tilde{x}_1 = x_1 + x_2$$
$$\tilde{x}_2 = |x_1 - x_2|$$

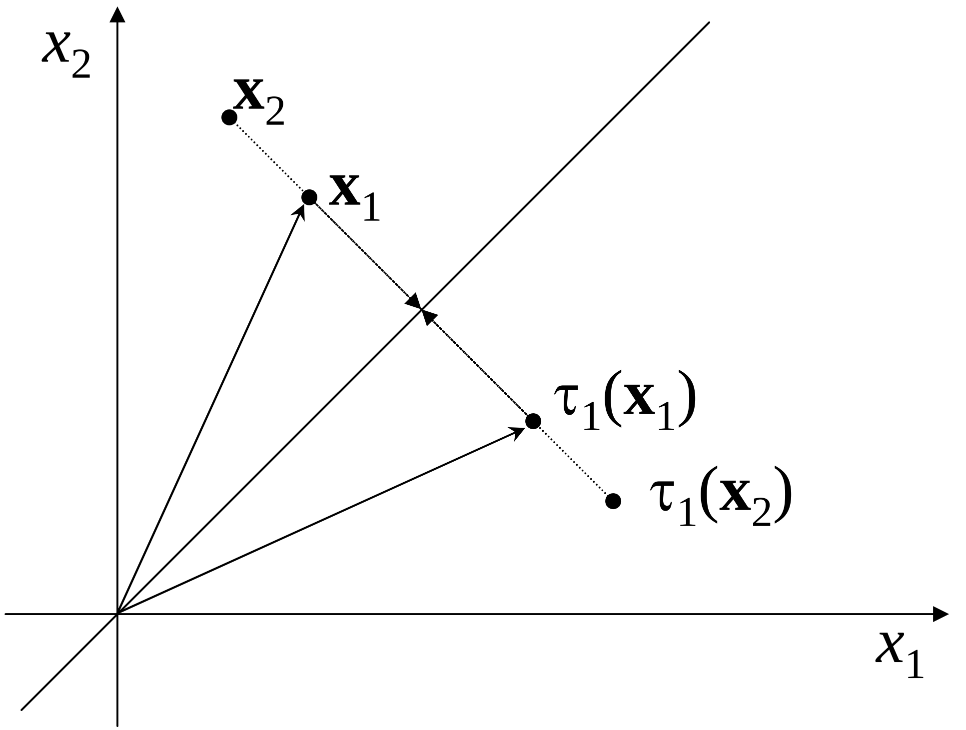
nämlich genau die Definition der R-Transformation für $N$=2. Die Vollständigkeit ist offensichtlich: $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_i) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}_i$

Die Faltung auf die obere Halbebene könnte anstatt der Betragsbildung auch durch eine Quadratur erreicht werden (Q-Transformation): $\tilde{x}_2 = (x_1 - x_2)^2$

# Beispiel einer nicht vollständigen translationsinvarianten Transformation

Die notwendige Bedingung der Invarianz erhält man durch Projektion auf die 1. Winkelhalbierende:

es gilt: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\varphi)$




$$\Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x_1 + x_2)$$

Die notwendige Bedingung der Translationsinvarianz wird erfüllt, aber nicht die Vollständigkeit.

# Vollständigkeit bei der RT

Die RT ist im allgemeinen nicht vollständig, so gilt z. Bsp. für $N$=4:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und:} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 7{,}5 \\ 0{,}5 \\ 5{,}5 \end{bmatrix} \quad \text{folgt:} \quad \tilde{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Man kann sich nun die Frage stellen, ob es noch weitere Vektoren gibt, welche die gleichen transformierten Merkmale besitzen ?

Die Abbildungseigenschaften für die Klasse RT der Dimension $N$=4 können folgendermaßen beschrieben werden:

Es gilt (ohne Beweis):

$$\mathbb{I}_{RT}(\mathbf{x}_1) = \mathbb{I}_{\mathbb{C}T}(\mathbf{x}_1) \cup \mathbb{I}_{\mathbb{C}T}(\mathbf{x}_2)$$

mit:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}T}({}^4\mathbf{x}) = \left\{ \underset{\mathbf{x}_1}{\overset{*}{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_2}{\overset{+}{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ x_3 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_3}{\overset{+}{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_4}{\overset{*}{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_5}{\overset{+}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_6}{\overset{*}{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_7}{\overset{*}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{x}_8}{\overset{+}{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}}} \right\}$$

mit:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}T}({}^4\mathbf{x}) = \overbrace{\mathcal{T}(\mathbf{x})}^{*} \cup \overbrace{\mathcal{T}(\psi(\mathbf{x}))}^{+}$$

Vereinigung von allen zyklischen Permutationen $\mathcal{T}$ von $\mathbf{x}$ und allen zyklischen Permutationen des gespiegelten Musters $\psi(\mathbf{x})$.