ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse WS 05/06

Musterlösung 7

Aufgabe 7.1: Differentielle Methode

a) Mit a durchläuft $g(a)$ alle Gruppenelemente und $g(a)\mathbf{x}$ bei festem $\mathbf{x}$ eine einparametrige Bahn in $I\!R^n$. Soll $I(g(a)\mathbf{x})$ Invariante sein, so muss $I(g(a)\mathbf{x})$ auf dieser Bahn konstant bleiben und darf folglich nicht von a abhängen, d.h. es muss gelten $\frac{\partial}{\partial a}I(g(a)\mathbf{x}) = 0$.

b) $\frac{\partial}{\partial a}I(g(a)\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial a}I(h(a,\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial a}I(h_1(a,\mathbf{x}),\ldots,h_n(a,\mathbf{x})) =$

$= \frac{\partial I}{\partial h_1}\frac{\partial h_1}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial I}{\partial h_n}\frac{\partial h_n}{\partial a} = (\frac{\partial I}{\partial h_1},\ldots,\frac{\partial I}{\partial h_n}) \cdot (\frac{\partial h_1}{\partial a},\ldots,\frac{\partial h_n}{\partial a})^T \stackrel{!}{=} 0$

Hierbei bedeutet $(\frac{\partial I}{\partial h_1},\ldots,\frac{\partial I}{\partial h_n})$ den Gradienten von I als Funktion von $h_1,\ldots,h_n$ und $(\frac{\partial h_1}{\partial a},\ldots,\frac{\partial h_n}{\partial a}) = \frac{\partial}{\partial a}h(a,\mathbf{x})$ die Tangente an der Bahn. Obige Bedingung bedeutet also, dass an jedem Punkt der Bahn der Gradient einer Funktion I orthogonal auf der Tangente an der Bahn in diesem Punkt stehen muss, wenn die Funktion I eine Invariante darstellen soll.

Aufgabe 7.2: Schwachkommutative Abbildungen

a) Zunächst die Definition der schwachen Kommutativität:
Eine Abbildung $\omega : X \to X$ des Musterraumes X auf sich heißt *schwach kommutativ*, falls zu jedem $\mathbf{x} \in X$ und $g_1 \in G$ ein $g_2 \in G$ mit der folgenden Eigenschaft existiert:

$$\omega g_1 \mathbf{x} = g_2 \omega \mathbf{x}$$

In dieser Aufgabe ist G die Gruppe der zyklischen Translationen. Falls ω_i schwach kommutativ ist, so gibt es zu jedem τ ein τ', so dass folgende Gleichung erfüllt wird:

$$\omega_i \tau \mathbf{x} = \tau' \omega_i \mathbf{x}$$

1. $(\omega_1\mathbf{x})_i := (\mathbf{x})_{2i}$
   Hier muss man zwei Fälle unterscheiden. Falls n gerade, ist ω_1 nicht schwach kommutativ. Falls n ungerade, ist ω_1 schwach kommutativ.
   Beweis: Sei τ eine Verschiebung um eine Stelle und n ungerade. Dann gilt:

   $(\omega_1\tau\mathbf{x})_i$
   $= (\tau\mathbf{x})_{2i}$
   $= \mathbf{x}_{2i+1}$
   $= \mathbf{x}_{2i+n+1}$ wegen Modulorechung

$= \mathbf{x}_{2i+2(n+1)/2}$
$= \mathbf{x}_{2(i+(n+1)/2)}$ n+1 ist gerade, also kann man durch 2 teilen
$= (\omega_1 \mathbf{x})_{i+(n+1)/2}$
$= (\tau^{(n+1)/2} \omega_1 \mathbf{x})_i$
Diese Aussage kann man leicht auf beliebige Verschiebungen verallgemeinern: Falls τ eine Verschiebung um a ist, dann ist τ' eine Verschiebung um $a*(n+1)/2$. (Man muss alles natürlich modulo n rechnen.)

2. $(\omega_2 \mathbf{x})_i := (\mathbf{x})_{i(1+i)} + (\mathbf{x})_{1+i}$
ω_2 ist nicht schwach kommutativ, weder für gerade noch für ungerade n:
Dies kann man leicht durch ein Gegenbeispiel zeigen!
Für $n = 3$ wählt man $x = (1, 2, 3)$. Dann wollen wir zeigen, dass es keine Translation τ' gibt, die $\tau' \omega_2 \mathbf{x} = \omega_2 \tau \mathbf{x}$ erfüllt.
$(\omega_2 \tau(1, 2, 3))$
$= (\omega_2(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{1}))$
$= ((\mathbf{x})_{1\cdot 2} + (\mathbf{x})_{1+1}, (\mathbf{x})_{2\cdot 3} + (\mathbf{x})_{1+2}, (\mathbf{x})_{3\cdot 4} + (\mathbf{x})_{3+1})$
$= (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1)$
$= (3 + 3, 3 + 1, 1 + 2)$
$= (6, 4, 3)$
Hingegen gilt für $\omega_2 \mathbf{x}$: $(\omega_2(1, 2, 3)) =$
$= (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1)$
$= (2 + 2, 2 + 3, 3 + 1)$
$= (4, 5, 4)$
Egal wie man $(4, 5, 4)$ transliert, man wird nie $(6, 4, 3)$ erhalten.

Für $n = 4$ wählt man $x = (1, 2, 3, 4)$. Dann gilt:
$(\omega_2 \tau(1, 2, 3, 4))$
$= (\omega_2(2, 3, 4, 1))$
$= ((\mathbf{x})_{1\cdot 2} + (\mathbf{x})_{1+1}, (\mathbf{x})_{2\cdot 3} + (\mathbf{x})_{1+2}, (\mathbf{x})_{3\cdot 4} + (\mathbf{x})_{3+1}, (\mathbf{x})_{4\cdot 5} + (\mathbf{x})_{4+1})$
$= (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_1)$
$= (3 + 3, 3 + 4, 1 + 1, 1 + 2)$
$= (6, 7, 2, 3)$
Hingegen gilt für $\omega_2 \mathbf{x}$: $(\omega_2(1, 2, 3, 4))$
$= ((\mathbf{x})_{1\cdot 2} + (\mathbf{x})_{1+1}, (\mathbf{x})_{2\cdot 3} + (\mathbf{x})_{1+2}, (\mathbf{x})_{3\cdot 4} + (\mathbf{x})_{3+1}, (\mathbf{x})_{4\cdot 5} + (\mathbf{x})_{4+1})$
$= (4, 5, 8, 5)$
Egal wie man $(6, 7, 2, 3)$ transliert, man wird nie $(4, 5, 8, 5)$ erhalten.

3. $(\omega_3 \mathbf{x})_i := ((\mathbf{x})_{i+1} - (\mathbf{x})_{i-1})^2 (\mathbf{x})_i$
ω_3 ist schwach kommutativ:
$(\omega_3 \tau \mathbf{x})_i$
$= ((\tau \mathbf{x})_{i+1} - (\tau \mathbf{x})_{i-1})^2 (\tau \mathbf{x})_i$
$= (\mathbf{x})_{i+2} - (\mathbf{x})_i)^2 (\mathbf{x})_{i+1}$
$= (\omega_3 \mathbf{x})_{i+1}$
$= (\tau \omega_3 \mathbf{x})_i$
Diese Aussage kann man leicht auf beliebige Verschiebungen verallgemeinern: Falls τ eine Verschiebung um a ist, dann ist τ' auch eine Verschiebung um a. (Man muss alles natürlich modulo n rechnen.)

b) Gesucht ist eine schwach kommutative Abbildungn ω, so dass $I(\omega(\mathbf{x}))$ nicht mehr invariant gegen Spigelung ist. Eine möglich Lösung ist: $(\omega \mathbf{x})_i = (\mathbf{x})_i + 2 \cdot (\mathbf{x})_{i+1}$.
Wir zeigen zunächst, dass ω eine schwach kommutative Abbildung ist:
$(\omega \tau \mathbf{x})_i$
$= ((\tau \mathbf{x})_i + 2 \cdot (\tau \mathbf{x})_{i+1})$
$= ((\mathbf{x})_{i+1} \cdot (\mathbf{x})_{i+2})$

$= (\omega\mathbf{x})_{i+1}$
$(\tau\omega\mathbf{x})_i$
Nun zeigen wir noch, dass $I(\omega(\mathbf{x}))$ nicht invariant gegenüber Spiegelung ist:
$(\omega\sigma\mathbf{x})_i$
$= ((\sigma\mathbf{x})_i + 2 \cdot (\sigma\mathbf{x})_{i+1})$
$= ((\mathbf{x})_{-i} \cdot (\mathbf{x})_{-i-1})$
$\neq (\sigma\omega\mathbf{x})_i$
Es gibt noch viel mehr schwach kommutative Abbildungen ω, welche die obige Bedingung erfüllen. Damit die Invarianz gegenüber Spiegelung nicht mehr erfüllt ist, darf ω nicht schwach kommutativ bzgl. Spiegelungen sein.