ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse WS 05/06

Musterlösung 9

Aufgabe 9.1: Stochastische Grundlagen

a) Die Kreuzkovarianz ist definiert durch,

$$C_{\mathbf{xy}} = E\{(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-\mu_{\mathbf{y}})^T\}$$

wegen der Unabhängigkeit ergibt sich

$$C_{\mathbf{xy}} = E\{(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}})\}E\{(\mathbf{y}-\mu_{\mathbf{y}})^T\} = (E\{\mathbf{x}\}-\mu_{\mathbf{x}})(E\{\mathbf{y}\}-\mu_{\mathbf{y}})^T = 0$$

Die Kreuzkorrelation ist definiert durch:

$$R_{\mathbf{xy}} = E\{\mathbf{x}\mathbf{y}^T\} = E\{\mathbf{x}\}E\{\mathbf{y}^T\} = \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{y}}^T$$

Somit gilt:

$$C_{\mathbf{xy}} = R_{\mathbf{xy}} - \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{y}}^T$$

b) <u>z.z.:</u> $Var\{\mathbf{x}\} = min_{\mathbf{z}\in I\!R^n} J(\mathbf{z})$, wobei $J(\mathbf{z}) = E\{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2\}$

<u>Beweis:</u> Nach Definiton gilt für die Varianz: $Var\{\mathbf{x}\} = E\{\|\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\|^2\}$
Es gilt weiter:
$E\{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2\}$
$= E\{\|\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}+E\{\mathbf{x}\}-\mathbf{z}\|^2\}$
$= E\{\|\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\|^2\} + 2\langle E\{\mathbf{x}\}-\mathbf{z}, \underbrace{E\{\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\}}_{=0}\rangle + \|E\{\mathbf{x}\}-\mathbf{z}\|^2$
$= Var\{\mathbf{x}\} + \|E\{\mathbf{x}\}-\mathbf{z}\|^2$
wird offenbar minimal für $\mathbf{z} = E\{\mathbf{x}\}$

c) <u>z.z.:</u> $E\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\} = (\mu_x-\mu_y)^2 + Var\{\mathbf{x}\} + Var\{\mathbf{y}\}$
<u>Beweis:</u>
$E\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\}$
$= E\{\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle\}$
$= E\{\|\mathbf{x}\|^2\} + E\{\|\mathbf{y}\|^2\} - 2\,\langle\mu_x,\mu_y\rangle$
$= E\{\|\mathbf{x}\|^2\} - \mu_x^2 + \mu_x^2 + E\{\|\mathbf{y}\|^2\} - \mu_y^2 + \mu_y^2 - 2\,\langle\mu_x,\mu_y\rangle$
$= Var\{\mathbf{x}\} + \mu_x^2 + Var\{\mathbf{y}\} + \mu_y^2 - 2\mu_x\mu_y$
$= Var\{\mathbf{x}\} + Var\{\mathbf{y}\} + (\mu_x-\mu_y)^2$

Aufgabe 9.2: Gaussverteilungen

1. Die Autokovarianz ergibt sich aus der Autokorrelation gerade durch Abzug der offenen Produkte der entsprechenden Mittelwerte:

$$C_{\mathbf{xx}} = R_{\mathbf{xx}} - \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{x}}^T = R_{\mathbf{xx}} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

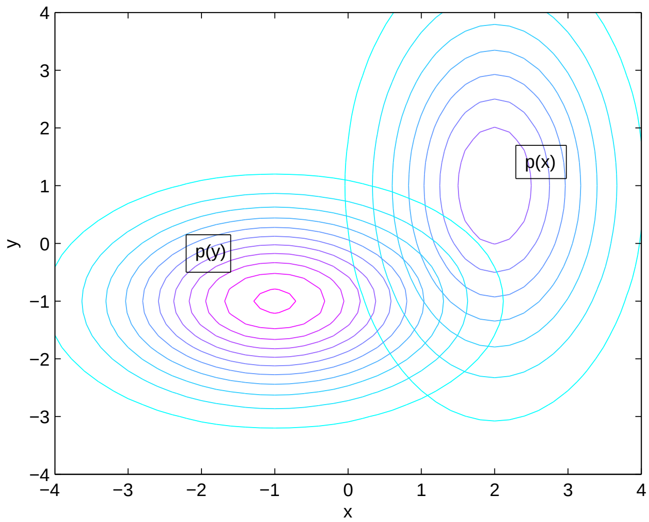
$$C_{\mathbf{yy}} = R_{\mathbf{yy}} - \mu_{\mathbf{y}}\mu_{\mathbf{y}}^T = R_{\mathbf{yy}} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die entsprechenden Verteilungsdichten ergeben sich zu:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}})^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} (\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}})}$$

und

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu_{\mathbf{y}})^T \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{y}-\mu_{\mathbf{y}})}$$



2. Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsprozesse kann man leicht die Kreuzkorrelation berechnen:

$$R_{\mathbf{xy}} = E\{\mathbf{x}\mathbf{y}^T\} = E\{\mathbf{x}\}E\{\mathbf{y}^T\} = \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{y}}^T = -\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Kreuzkovarianz der beiden Prozesse $C_{\mathbf{xy}} = 0$.