ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse WS 05/06

Musterlösung 10

Aufgabe 10.1: Autokorreltationsmatrix, Affine Transformation

1. Wir suchen ein affine Transformation Ξ, die die Koordinaten der Ellipse auf die Koordinaten eines Einheitskreises transformiert. Da $\mathbf{K}$ positiv definit ist, können wir die Matrix wie folgt zerlegen:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}$$

Für das Inverese von $\mathbf{K}$ gilt:

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}$$

Eingesetzt in die Ellipsengleichung ergibt dies:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2})(\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U} \mathbf{x}) = 1$$

Diese Abbildung ist nichts anders als die Whitening-Transformation (s. Kapitel 6, Folie 28). Somit ist Ξ:

$$\Xi = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}$$

2. Da zwischen den Koordinaten der Ellipse und den Koordinaten des Kreises ein lienarer Zusammenhang besteht, können wir die Korrelationsmatrix des Prozesses $(x_1, x_2)^T$ aus der Korrelationsmatrix des Prozesses $(\xi_1, \xi_2)^T$ berechnen.

$$\mathbf{R}_{\xi\xi} = \frac{1}{4} \mathbf{I}$$

und es gilt:

$$\mathbf{R}_{\xi\xi} = E\{\Xi \mathbf{x} \mathbf{x}^T \Xi^T\} = \Xi E\{\mathbf{x} \mathbf{x}^T\} \Xi^T = \Xi \mathbf{R}_{xx} \Xi^T$$

Somit gilt für $\mathbf{R}_{xx}$:

$$\mathbf{R}_{xx} = \Xi^{-1} \mathbf{R}_{\xi\xi} (\Xi^T)^{-1} = \frac{1}{4} \Xi^{-1} \mathbf{I} (\Xi^T)^{-1} = \frac{1}{4} (\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda}^{1/2})(\boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U}) = \frac{1}{4} \mathbf{K}$$

Aufgabe 10.2: KLT

1. $\mathbf{R_{xx}} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathbf{T}\} = \frac{1}{2}\mathbf{x_1}\mathbf{x_1^T} + \frac{1}{2}\mathbf{x_2}\mathbf{x_2^T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. Wir berechnen zunächst die Eigenwerte λ_i von $\mathbf{R}_{xx}$, z.B. durch lösen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(\mathbf{R}_{xx} - \lambda\mathbf{I}) = 2\mathbf{x}^3 - 9\mathbf{x}^2 + 9\mathbf{x} = 0$$

   Die reellen Eigenwerte sind dann:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.5, \lambda_3 = 0$$

   und damit ist:

$$\mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

   Durch lösen des folgenden LGS erhalten wir die dazugehörigen Eigenvektoren:

$$(\mathbf{R}_{xx} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

   Eigenvektor zu Eigenwert 3:

$$\mathbf{v}_1^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Eigenvektor zu Eigenwert 1.5:

$$\mathbf{v}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Der Eigenvektor zu Eigenwert 0:

$$\mathbf{v}_3^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Dann ist:

$$\mathbf{V} = \left[\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|}\right] = \left[\frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{6}}, \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{3}}, \frac{\mathbf{v}_3}{\sqrt{2}}\right]$$

   und es gilt:

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$$

3. Die Matrix $\mathbf{R}_{xx}$ ist nicht positiv definit, da ein Eigenwerte 0 ist. Da die restlichen zwei Eigenwerte positiv sind, ist $\mathbf{R}_{xx}$ positiv semidefinit.(s. Fischer, Lineare Algebra, S. 321).

   Falls $\mathbf{x}_3$ als neue Beobachtung hinzukommt ändert sich die Antwort nicht, da man $\mathbf{x}_3$ als Linearkombination von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ schreiben kann: $\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Ein Eigenwert ist dann noch immer Null.

   Durch die Hinzunahme der Beobachtung $\mathbf{x}_4$ erhalten wir folgende Matrix $\mathbf{R}'_{xx}$:

$$\mathbf{R}'_{xx} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & -9 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 11 & -7 \\ -1 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

   Mit Eigenwerten:

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

   Nun sind alle Eigenwerte positiv und somit ist $\mathbf{R}'_{xx}$ positiv definit.