ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

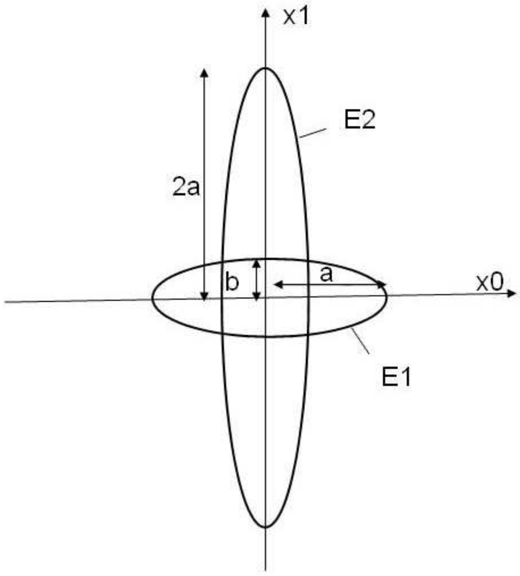
Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 05/06

Musterlösung 12

Aufgabe 12.1: Klassifikator (Bayes, NN)

1. Die zwei Ellipsen haben beide ihren Mittelpunkt im Ursprung des Koordiantensystems; deren Hauptachse fällt mit der x-Achse zusammen.



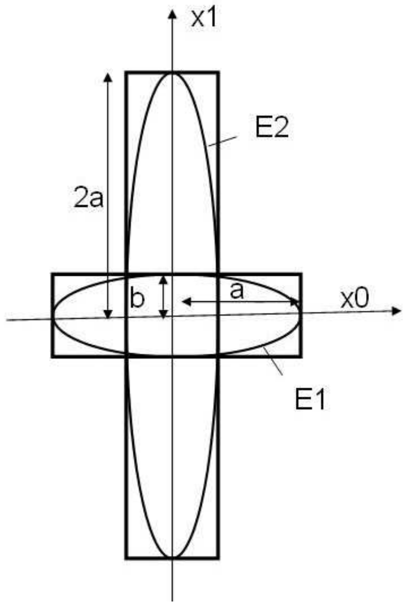
Da es sich um Zufallsprozesse handelt, muss die Fläche der Ellipsen gleich 1 sein. Da es sich um gleichverteilte Prozesse handelt ist die Wahrscheinlichkeit für einen Punkt innerhalb der Ellipse $1/c_1$ für Ellipse 1 und $1/c_2$ für Ellipse 2. Aus K_i lassen sich die Eigenwerte sehr schnell herauslesen, denn sie stehen direkt auf der Diagonalen. Somit gilt für c_1 und c_2:

$$c_1 = \frac{1}{\pi ab}$$

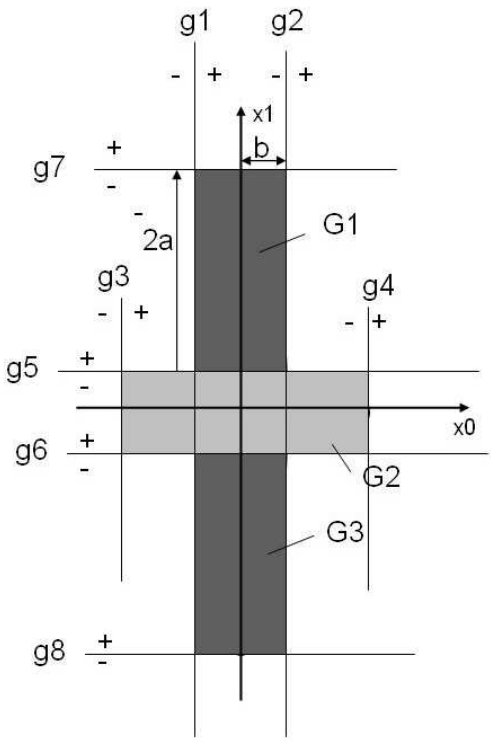
$$c_2 = \frac{1}{\pi 2ab} = \frac{1}{2}c_1$$

Da c_1 größer als c_2 ist, wird im Schnittbereich zur Klasse 1 klassifiziert, ansonsten zu der Klasse der Ellipse, in der der Datenpunkt liegt.

2. Durch Annährung der Bereiche von Teil 1) durch Geraden erhalten wir folgende Gebiete:



Nun soll ein Drei-Lagen Perceptron mit zwei Ausgängen für die zwei Klassen entworfen werden. Der $i$te Ausgang liefert $+1$ falls die Beobachtung $\mathbf{x}$ im Bereich der Klasse $\{\mathbf{X}_i\}$ liegt und -1 sonst.
Für die 1. Schicht sollen zunächst das Gebiet selektiert werden. Dieses wird durch die Geraden $g_1 - g_8$ begrenzt.



Schicht 1:

$$\mathbf{W}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \; g_1 \\ \leftarrow \; g_2 \\ \leftarrow \; g_3 \\ \leftarrow \; g_4 \\ \leftarrow \; g_5 \\ \leftarrow \; g_6 \\ \leftarrow \; g_7 \\ \leftarrow \; g_8 \end{array} \qquad \mathbf{b}^1 = \begin{bmatrix} b \\ -b \\ a \\ -a \\ -b \\ b \\ -2a \\ 2a \end{bmatrix}$$

Für die 2. Schicht müssen die Gebiete (G1,G2,G3) selektiert werden. Diese werden jeweils durch vier Geraden begrenzt. Die Geraden, welche keine Begrenzungsfunktion haben, werden in der Gewichtungmatrix $\mathbf{W}^2$ mit 0 bewertet.

Der Schwellwert hat den Wert:
Anzahl der relevanten Begrenzungsgeraden - 1.
Schicht 2:

$$\mathbf{W}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Für die 3. Schicht müssen nun nur die Gebiete selektiert werden, die zu Klasse 1 bzw. zu Klasse 2 gehören. Dabei gehört $(G1 \vee G3)$ zur Klasse 2 und G2 zur Klasse 1:
Schicht 3:

$$\mathbf{W}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 12.2: Perceptron mit Offset

Die gegebenen Daten lauten:

$$\omega_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \omega_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, b_0 = 1, \mathbf{w_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Algorithmus lautet:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w_{i+1}} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_i} \\ b_i \end{pmatrix} - \sum_{\mathbf{x} \in Y} \delta_{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei

$$\delta_{\mathbf{x}} = \begin{cases} -1 & \mathbf{x} \in \omega_1 \\ 1 & \mathbf{x} \in \omega_2 \end{cases}$$

und

$$Y = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \omega_1 \wedge \mathbf{w_i}^T \mathbf{x} + b_i < 0 \vee \mathbf{x} \in \omega_2 \wedge \mathbf{w_i}^T \mathbf{x} + b_i > 0 \right\}$$

Die Klassifikation mit dem resultierenden $\mathbf{w}$ und b erfolgt durch

$$\omega = \operatorname{sign}(x^T \mathbf{w} + b)$$

Die Grenzlinie ergibt sich als

$$0 = \mathbf{x}^T \mathbf{w} + b = x_0 w_0 + x_1 w_1 + b$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{w_0}{w_1} x_0 - \frac{b}{w_1}$$

Für die verschiedenen Iterationen ergeben sich die Grenzlinien g_i und Fehlklassifikationen Y_i:

0. $g_0 : x_1 = -1$, $Y_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

1. Iteration: $\begin{pmatrix} \mathbf{w_1} \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_1 = -1,\ g_1 : x_0 = -\frac{1}{2}, Y_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

2. Iteration: $\begin{pmatrix} \mathbf{w_2} \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = 1,\ g_2 : x_1 = x_0 - \frac{1}{2}, Y_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3. Iteration: $\begin{pmatrix} \mathbf{w_3} \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = 0,\ g_3 : x_1 = \frac{3}{2} x_0, Y_2 = \emptyset$