ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 05/06

Aufgabenblatt 5 (12 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 4d

Abgabe am 7.12.2005 vor der Vorlesung

Bitte Name und Matrikelnummer auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 5.1: Fourierkoeffizienten (5 Punkte)

Man betrachte das Rechteck mit den Punkten $\mathbf{x}_1 = -2 - \mathbf{i}$, $\mathbf{x}_2 = 2 - \mathbf{i}$, $\mathbf{x}_3 = 2 + \mathbf{i}$ und $\mathbf{x}_4 = -2 + \mathbf{i}$

1. Mit $\mathbf{x}_1$ als Aufpunkt berechnen Sie die Fourierkoeffizienten des Rechtecks, indem Sie seine Kontur mit der Bogenlänge parametrisieren.
2. Wie ändern sich die Fourierkoeffizienten, wenn man als Aufpunkt den Punkt $\mathbf{x}_2$ wählt? Welche Art von Symmetrie lässt sich an den Koeffizienten ablesen?
3. Leiten Sie die Fourierkoeffizienten für das Rechteck mit den Punkten $\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{y}_2 = 2$, $\mathbf{y}_3 = 2 + 4\mathbf{i}$ und $\mathbf{y}_4 = 4\mathbf{i}$ aus den Ergebnissen von Teilaufgabe 1 her.

Aufgabe 5.2: Vektorielle und komplexe Fourierkoeffizienten (3 Punkte)

Die Darstellung einer Kontur als komplexes Konturmuster $\mathbf{x}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. als vektorielle reelle Funktion $\mathbf{X}(t) = (u(t), v(t))^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ führt zu unterschiedlichen Definitionen der Fourierkoeffizienten $\mathbf{c}_k$ bzw. $\mathbf{X}_k = (U_k, V_k)^T$. Zwischen diesen existieren jedoch einfache Zusammenhänge.

1. Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen $\mathbf{c}_k$ und U_k bzw. V_k her.
2. Welche Beziehung besteht zwischen U_k und U_{-k} bzw. V_k und V_{-k}?
3. Aus 1. resultiert eine Vorschrift zur Berechnung der $\mathbf{c}_k$ aus gegebenen U_k, V_k. Geben Sie eine entsprechende inverse Berechnungsvorschrift an.

Aufgabe 5.3: Programmieraufgabe: Fouriersynthese, Rotationssymmetrie (4 Punkte)

Auf der Internetseite zur Vorlesung finden Sie die Datei `computeFc.sci`, welche die Fourierkoeffizienten eines Polygonzuges erzeugt. Der Funktionsaufruf ist durch folgende Syntax gegeben:

```
Fc = computeFc ( n, Polygon )
```

Hierbei ist `Polygon` ein p-Vektor, welcher die Koordinaten der p Eckpunkte des Polygonzuges in komplexer Schreibweise enthält, `2n+1` die Anzahl der zu berechnenden Fourierkoeffizienten und `Fc` der `2n+1`-Ergebnisvektor mit den Fourierkoeffizienten in der Reihenfolge $-\mathbf{c}_n, \ldots, \mathbf{c}_0, \ldots, \mathbf{c}_n$.

1. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktion für $n = 7, 13, 19, 31$ die Fourierkoeffizienten für:

   a) Ein regelmäßige Dreieck, das durch die 3 dritten komplexen Einheitswurzeln definiert ist (d.h. die Eckpunkte $e^{\frac{2\pi}{3}\mathbf{i}k}$ für $k = 0, ..., 2$ besitzt).

   b) Für das Rechteck in Aufgabe 5.1

2. Schreiben Sie eine Funktion zur Fouriersynthese, die als Eingabevektor komplexe Fourierkoeffizienten in der Folge $-\mathbf{c}_n, \ldots, \mathbf{c}_0, \ldots, \mathbf{c}_n$ erwartet. Die Funktion soll einen komplexen Vektor X zurückgeben, der die Objekte approximiert. Verwenden Sie die in Teilaufgabe 1.) erzeugten Fourierkoeffizienten als Testdaten. Visualisieren Sie die Ergebnisse jeweils mit: `plot2d(real(X),imag(X))`.

3. Schreiben Sie eine Funktion, welche anhand der Fourierkoeffizienten einen Test auf Rotationssymmetrie des Polygonzuges durchführt und den Grad zurückgibt. Prüfen Sie die Funktion mit den berechneten Fourierkoeffizienten aus Teilaufgabe 1.)