ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 05/06

Aufgabenblatt 6 (12 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 5b

Abgabe am Mittwoch 14.12.2005 vor der Vorlesung

Bitte Name und Gruppe auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 6.1: Affininvariante Fourierdeskriptoren von Polygonzügen (4 Punkte)

Gegeben sind untenstehenden Polygone $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$. Die affininvarianten Fourierdeskriptoren (ohne Aufpunktverschiebung) von $\mathbf{P}_1$ lauten für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{1}{k^2} \quad \text{für} \quad k = 1 + 4z, z \in Z, \\ Q_k &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

Berechnen Sie die entsprechenden Fourierdeskriptoren von $\mathbf{P}_2$ und schließen Sie hieraus, ob die beiden Polygone unter affinen Abbildungen äquivalent sind.

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.2: Invarianten (4 Punkte)

Wir betrachten n-dimensionale Muster $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Sei $I(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ eine Invariante bzgl. den zyklischen Translationen τ. Weiter sei $I(\mathbf{x})$ differenzierbar. Zeigen Sie, daß gilt

$$\tau f(\mathbf{x}) = f(\tau \mathbf{x}),$$

wobei $f(\mathbf{x}) := \nabla I(\mathbf{x})$ und $\nabla = (\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)$ der Gradientenoperator.

Aufgabe 6.3: Programmieraufgabe: Gruppenmittel und DFT (4 Punkte)

Für diese Teilaufgabe sind zunächst ein paar Vorüberlegungen erforderlich:

Für einen reellen Mustervektor $\mathbf{x} = (x(0), x(1), x(2))^T = (x_0, x_1, x_2)^T$ der Länge 3 bezeichne $\mathbf{X} = (X(0), X(1), X(2))^T$ seine DFT (Diskrete Fouriertransformation), die für die Länge 3 über

$$X(k) = \sum_{n=0}^{2} x(n)\omega^{kn}, \quad k = 0, 1, 2 \text{ mit } \omega^3 = 1$$

definiert ist. Hierbei ist ω eine komplexe dritte Einheitswurzel, welche auch die Gleichungen $1 + \omega + \omega^2 = 0$ sowie $\omega^* = \omega^2$ erfüllt. $*$ bezeichnet die komplexe Konjugation.

1. Zeigen Sie für $k = 0, 1, 2$, dass die Zahlen $I(k) := |X(k)|^2 = X(k) \cdot X(k)^*$ Translationsinvarianten darstellen, indem Sie jedes $I(k)$ als Gruppenmittel (Gruppe der zyklischen Verschiebungen) über ein möglichst einfaches Polynom in x_0, x_1 und x_2 ausdrücken!

2. Implementieren Sie in Scilab eine Funktion, die zu einem gegebenen Vektor $\mathbf{v} = (x_0, x_1, ..., x_{n-1})^T$ der Länge n und einem Monom $P(\mathbf{v}) = x_0^{d_0} x_1^{d_1} \ldots x_{n-1}^{d_{n-1}}$ das Gruppenmittel ?ber die endliche Gruppe der Translationen erzeugt. Das Monom soll als Vektor der Exponenten $d_0, d_1, ..., d_{n-1}$ angegeben werden.

3. Testen Sie Ihre Ergebnisse und Ihre Funktion, indem Sie eine Translationsinvariante zum Vektor $\mathbf{v} = (5, 2, 1)^T$ auf zwei verschiedene Arten berechnen und vergleichen:

   a) mit der DFT: $|X(k)|^2$

   b) mit Hilfe der in Teilaufgabe 6.3.1 gefundenen Polynome und der in Teilaufgabe 6.3.2 geschriebenen Funktion

Hinweis: Die DFT kann in Scilab mit dem Befehl `dft` berechnet werden. Genaue Information zum Aufruf gibt die Hilfe.