

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 05/06

Aufgabenblatt 9 (10 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 6

Abgabe am **Mittwoch 18.1.2006** vor der Vorlesung

Bitte Name und Gruppe auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 9.1: Stochastische Grundlagen (6 Punkte)

Sei $\{\mathbf{x}\}$ und $\{\mathbf{y}\}$ zwei vektorielle, unabhängige Zufallsprozesse im \mathbb{R}^n mit Mittelwerten $\mu_{\mathbf{x}}$ und $\mu_{\mathbf{y}}$.

- a) Sei $\mathbf{C}_{\mathbf{xy}}$ die Kreuzkovarianz- und $\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}$ die Kreuzkorrelationsmatrix. Zeige, daß gilt

$$\mathbf{C}_{\mathbf{xy}} = \mathbf{R}_{\mathbf{xy}} - \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{y}}^T.$$

- b) Sei $J(\mathbf{z}) = E\{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2\}$. Zeige, daß für die Varianz gilt

$$\text{Var}\{\mathbf{x}\} = \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} J(\mathbf{z}).$$

- c) Zeige, daß gilt

$$E\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2\} = (\mu_{\mathbf{x}} - \mu_{\mathbf{y}})^2 + \text{Var}\{\mathbf{x}\} + \text{Var}\{\mathbf{y}\}.$$

Aufgabe 9.2: Gaussverteilungen (4 Punkte)

Wir betrachten zwei zweidimensionale Gaussverteilte unabhängige Zufallsprozesse $\{\mathbf{x}\}$ und $\{\mathbf{y}\}$ mit Mittelwerten $\mu_{\mathbf{x}} = (2, 1)^T$ und $\mu_{\mathbf{y}} = (-1, -1)^T$ und Autokorrelationsmatrizen

$$R_{\mathbf{xx}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } R_{\mathbf{yy}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie die zugehörigen Autokovarianzmatrizen $C_{\mathbf{xx}}$ und $C_{\mathbf{yy}}$. Wie lauten die zugehörigen Verteilungsdichten? Veranschaulichen Sie sich die Verteilungen in der Ebene.
2. Berechnen Sie die Kreuzkorrelation $R_{\mathbf{xy}}$ und die Kreuzkovarianz $C_{\mathbf{xy}}$ der beiden Prozesse.