ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 05/06

Aufgabenblatt 10 (12 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 7

Abgabe am 25.1.2006 vor der Vorlesung

Bitte Name und Matrikelnummer auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 10.1: Autokorrelationsmatrix, Affine Transformation (6 Punkte)

Eine auf den Ursprung zentrierte Ellipse ist gegeben durch $(x_1, x_2)\mathbf{K}^{-1}(x_1, x_2)^T = 1$, wobei $\mathbf{K}$ positiv definit ist. Die Merkmale einer Beobachtung $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ liegen gleichverteilt innerhalb dieser Ellipse, und nie ausserhalb.

1. Bringen Sie die Ellipsengleichung in die Form

$$\xi_1^2 + {\xi_2}^2 = 1$$

   wobei der lineare Zusammenhang $\Xi(x_1, x_2)^T = (\xi_1, \xi_2)^T$ gilt. Wie hängt Ξ von der Matrix $\mathbf{K}$ ab?

2. Geben Sie die Korrellationsmatrix $\mathbf{R_{xx}}$ des Prozesses $(x_1, x_2)^T$ an.
   Hinweis: Die Korrelationmatrix eines 2D-Prozesses gleichverteilt innerhalb des Einheitskreises ist gegeben durch $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.2: KLT (6 Punkte)

Sei $\{\mathbf{x}\}$ ein Zufallsprozess in $\mathbb{R}^3$ mit Beobachtungen: $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)^T$ und $\mathbf{x}_2 = (2, -1, -1)^T$.

1. Berechnen Sie die Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R_{xx}}$.
2. Diagonalisieren Sie $\mathbf{R_{xx}}$, d.h. bringen Sie sie in die Form $\mathbf{V\Lambda V}^T$ wobei $\mathbf{VV}^T = \mathbf{I}$ und $\mathbf{\Lambda} = \mathtt{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sind.
3. Ist die oben berechnete Matrix $\mathbf{R_{xx}}$ positiv definit? Begründen Sie! Wie ändert sich die Antwort falls neue Beobachtungen $\mathbf{x}_3 = (4, 1, 1)^T$ *bzw.* $\mathbf{x}_4 = (0, 3, -3)^T$ berücksichtigt werden?