**ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG**
**INSTITUT FÜR INFORMATIK**
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

# Übungen zur Vorlesung
# Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
# WS 05/06

## Aufgabenblatt 12 (10 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 8

**Abgabe am 8.2.2006 vor der Vorlesung**

**Bitte Name und Matrikelnummer auf den Lösungen angeben.**

### Aufgabe 12.1: Klassifikator (Bayes, NN) (6 Punkte)

Seien $\{\mathbf{X}_1\}$ und $\{\mathbf{X}_2\}$ Zufallsprozesse in $\mathbb{R}^2$. Die Prozesse $\{\mathbf{X}_i\}$ sind gleichverteilt innerhalb der Ellipse $\mathbf{x}^T\mathbf{K}_i^{-1}\mathbf{x} = 1$ und ausserhalb Null, für $i = 1, 2$. Weiter sind

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & 4a^2 \end{pmatrix}$$

mit $a > b$ bekannt.

1. Veranschaulichen Sie sich die zwei Prozesse qualitativ in $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die Klassifikationsbereiche nach dem Maximum-Likelihood Kriterium an.
   *Hinweis:* Die Fläche einer Ellipse $\mathbf{x}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x} = 1$ ist gegeben durch $\pi\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}$, wobei $\lambda_i$ die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{K}$ sind.
2. Die Bereiche von Teil 1) werden jetzt einfach durch Geraden parallel zu den Achsen angenähert. Entwerfen Sie ein Drei-Lagen-Perceptron mit zwei Ausgängen für die zwei Klassen. Der $i$te Ausgang liefert $+1$ falls die Beobachtung $\mathbf{x}$ im Bereich der Klasse $\{\mathbf{X}_i\}$ liegt und $-1$ sonst. Geben Sie für jede Schicht $k$ die Matrizen $\mathbf{W}^k$ und $\mathbf{b}^k$ an.

### Aufgabe 12.2: Perceptron mit Offset (4 Punkte)

Man betrachte ein Zwei-Klassen Problem, bei dem die Klasse $\omega_1$ aus den Merkmalvektoren $(0,0)^T$ und $(0,2)^T$ und die Klasse $\omega_2$ aus den Merkmalvektoren $(1,0)^T$ und $(1,1)^T$ besteht. Mit der Initialisierung $\mathbf{w}_0 = (0,1)^T$ und $b_0 = 1$ verwende man den folgenden Perceptron-Algorithmus, um eine Gerade zu bestimmen, die beide Klassen trennt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_i \\ b_i \end{pmatrix} - \sum_{\mathbf{x}\in Y} \delta_x \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei $\delta_x = -1$ falls $\mathbf{x} \in \omega_1$ und $\delta_x = +1$, falls $\mathbf{x} \in \omega_2$. $Y$ ist dabei die Menge der falsch klassifizierten Vektoren, d.h. denjenigen, die $\mathbf{w}_i^T\mathbf{x} + b_i < 0$ bei $\mathbf{x} \in \omega_1$ und $\mathbf{w}_i^T\mathbf{x} + b_i > 0$ bei $\mathbf{x} \in \omega_2$ ergeben.

Man skizziere die erhaltene Gerade nach jeder Iteration.