ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 05/06

Bonusblatt 13 (12 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 9

Abgabe am Mittwoch 15.2.2006 vor der Vorlesung

Bitte Name und Gruppe auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 13.1: Regularisierte Lineare Regression (12 Punkte)

Seien Trainingsbeispiele $\{(\mathbf{x}_i, y_i)|i = 1, ..., n\}$ gegeben mit $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$ und $y_i \in \mathbb{R}$. Wir möchten an die Trainingsbeispiele eine lineare Funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x}$ fitten. Dazu soll folgender Ausdruck minimiert werden

$$J(w) = \sum_i^n |\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i|^2 + \alpha\mathbf{w}^T\mathbf{w}$$

mit $\alpha > 0$. Der zweite Term ist eine sogenannte Regularisierung. Er erzwingt die Eindeutigkeit der Lösung, falls die Trainingbeispiele nicht den gesammten $\mathbb{R}^m$ aufspannen.

a) Zeigen Sie, daß Lösungen zu obigen Minimierungsproblem der Form

$$\mathbf{w}^* = (\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} + \alpha\mathbf{I}_m)^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}$$

sind. Dabei ist $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \sum_1^n \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T$ und $\mathbf{R}_{\mathbf{xy}} = \sum_1^n \mathbf{x}_i y_i$. Die Herleitung läuft analog zur in der Vorlesung gezeigten Vorgehensweise beim allgemeinen Polynomklassifikator.

Wir wollen nun auf eine duale Weise obiges Minimierungsproblem lösen.

b) Man zeige, daß Lösungen des Problems immer der Form

$$\mathbf{w}^* = \sum_{i=1}^n \beta_i\mathbf{x}_i$$

sind. Dabei sind die $\beta_i \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dazu zerlege man ein beliebiges $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ in einen Anteil $\mathbf{w}_{||}$ im Span $W_{||}$ der Trainingsbeispiele $\mathbf{x}_i$ und in dessen orthogonales Komplement $W_\perp$. Das heißt, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{||} + \mathbf{w}_\perp$. (Hinweis: Für beliebige $\mathbf{w}_{||} \in W_{||}$ und $\mathbf{w}_\perp \in W_\perp$ gilt $\mathbf{w}_{||}^T\mathbf{w}_\perp = 0$)

c) Statt nun $\mathbf{w}$ direkt zu bestimmen, werden wir die β_i suchen, die das Minimierungsproblem lösen. Zeigen Sie, daß das Minimierungsproblem äquivalent ist zu

$$J(\mathbf{b}) = ||\mathbf{Kb} - \mathbf{y}||^2 + \alpha \mathbf{b}^T \mathbf{Kb},$$

wobei $(\mathbf{K})_{ij} = \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$, $(\mathbf{b})_i = \beta_i$ und $(\mathbf{y})_i = y_i$.

d) Wir nehmen an $\mathbf{K}$ sei invertierbar. Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{b} = (\mathbf{K} + \alpha \mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{y}$$

das Minimierungsproblem aus c) löst.

e) Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile der Formulierung aus Aufgabenteil a) und der dualen aus c) und d).

f) (Scilabaufgabe) Auf der Übungswebseite finden Sie die Datei `fish_fts.dat`, die für das in Übungsblatt 8) eingeführte Fischklassifikationsproblem bereits berechnete Merkmale enthält. Laden Sie die `.dat` Datei mittels dem `load`-Befehl. Die Datei enthält die Merkmale in zwei verschiedene Variablen `Mond` und `Spitz`

1. Berechnen Sie die Kernmatrix $\mathbf{K}$ und den Vektor $\mathbf{b}$. Geben Sie dafür für die Stichproben der Klasse `Mond` den Label $+1$ und für der Klasse `Spitz` -1. Nehmen Sie ein geeignete α so dass die Matrix $\mathbf{K}$ numerisch invertierbar wird.
2. Berechnen Sie für alle Fische den geschätze Labelvektor durch $\mathbf{y}' = \texttt{sign(}\ \mathbf{Kb}\ \texttt{)}$. Als Gütemaß für die Klassifikation geben Sie die Anzahl von Fehlklassifikationen an.
3. Wir redefinieren jetzt $(\mathbf{K})_{ij} = (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j + 1)^d$. Berechnen Sie Teilaufgabe 1) und 2) nochmals für diese Matrix. Nehmen Sie $d = 3$. Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Dies ist ein Bonusübungsblatt. Die Punkte werden zu den bis jetzt erreichten Punkten hinzuaddiert.