Die Gruppe der affinen Abbildungen $\mathcal{A}$

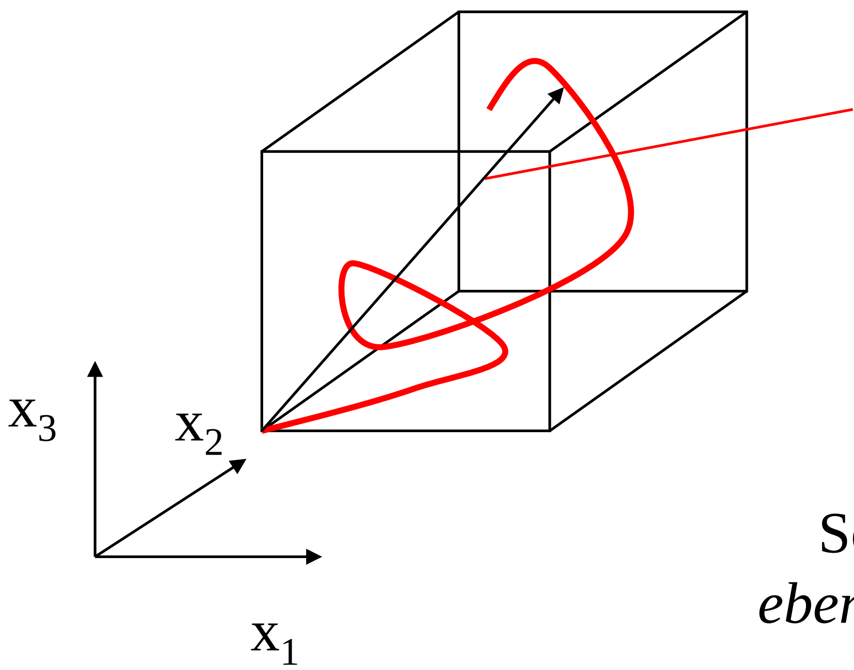
Die Gruppe der affinen Abbildungen in der Ebene entsteht durch Wahl einer beliebigen regulären Matrix **A** (det(**A**) $\neq 0$) und einer Translation **a**:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diese Abbildung hat 6 Freiheitsgrade (4 für die allgemeine Matrix **A**, sowie zwei für den Translationsvektor **a**.

Die affine Abbildung beschreibt die allgemeine räumliche Bewegung einer planaren Bildvorlage mit anschließender Parallelprojektion in die Kameraebene, was nachfolgend gezeigt werden soll.

Bewegung einer beliebigen Kurve im Raum mit anschließender Parallelprojektion in die Kameraebene



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Sonderfall der
ebenen Raumkurve: $x_3(t) \equiv 0$

Die Bogenlänge berechnet sich zu:

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)} \, dt$$

mit:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ dx_3/dt \end{bmatrix}$$

Tangentenvektor

Euklidsche räumliche Bewegung (Rotation und Translation):

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}}$$

Mit der orthogonalen Drehmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} = c_2c_3 - c_1s_2s_3 & A_{12} = -\,c_2s_3 - c_1s_2c_3 & A_{13} = s_1s_2 \\ A_{21} = s_2c_3 + c_1c_2s_3 & A_{22} = -\,s_2s_3 + c_1c_2c_3 & A_{23} = -\,s_1c_2 \\ A_{31} = s_1s_3 & A_{32} = s_1c_3 & A_{33} = c_1 \end{bmatrix}$$

wobei:

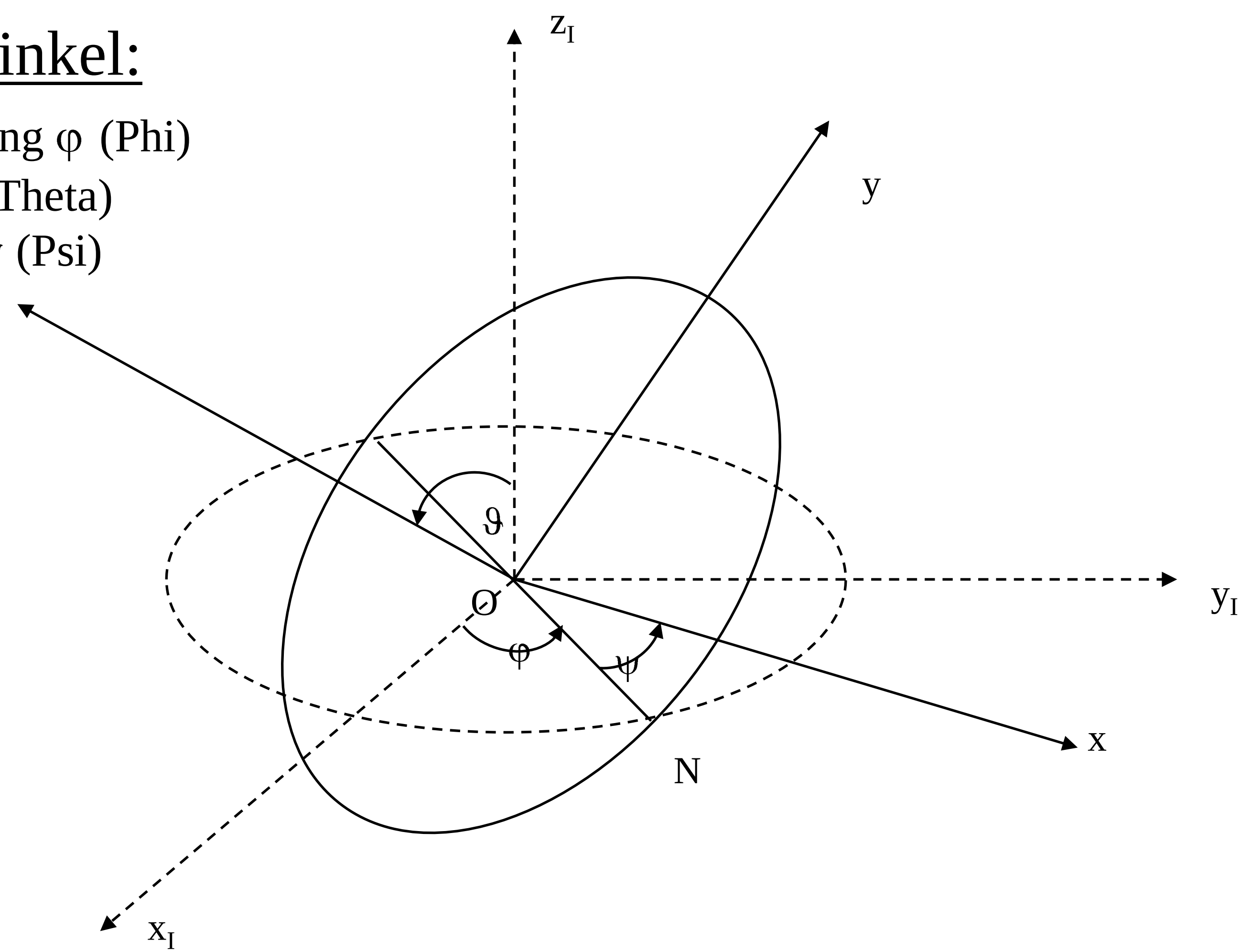
$$\begin{array}{lll} c_1 = \cos\vartheta, & c_2 = \cos\psi, & c_3 = \cos\varphi \\ s_1 = \sin\vartheta, & s_2 = \sin\psi, & s_3 = \sin\varphi \end{array}$$

Und der Translation:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Eulersche Winkel:

1. Reine Drehung φ (Phi)
2. Nutation ϑ (Theta)
3. Präzession ψ (Psi)



Der Übergang vom Inertialsystem auf das körperfeste System wird mit den drei folgenden Drehungen realisiert:

1. Drehung φ um die z_I - Achse: die x-Achse geht in die sogenannte Knotenlinie O-N über.
2. Drehung ϑ um die Knotenlinie O-N: Die inertiale z_I - Achse geht in die körperfeste z-Achse über.
3. Drehung ψ um die z - Achse: Man erhält das körperfeste (x,y,z)-Koordinatensystem.

Faktorisierung der Drehmatrix:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Drehung um z-Achse } (\psi)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix}}_{\text{Drehung um x-Achse } (\vartheta)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Drehung um z-Achse } (\varphi)}$$

x_3 unverändert

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 \\ s_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Rotation von x_1 und x_2

Eigenschaften der Drehmatrix **A**:

- Die Zeilen- und Spaltenvektoren von **A** sind orthogonal und normiert und daraus folgt
- Eine Drehmatrix **A** ist orthogonal, d.h. es gilt:

  $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ und somit auch $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}$
- Weiterhin gilt: det(**A**)=1 (reine Drehung, ohne Spiegelung)
- Es gilt somit für die faktorisierte Drehmatrix:

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = (\mathbf{ABC})^{T} = \mathbf{C}^{T}\mathbf{B}^{T}\mathbf{A}^{T}$$

Und somit:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zurückdrehen durch Umkehrung der Reihenfolge!

Kompaktere Schreibweise:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_3 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und: $\mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{R}_i^T$

Nun: orthogonale Projektion der räumlichen Kurve $\mathbf{x}(t)$ in die $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$-Ebene mit dem Projektionsoperator $\mathbf{P}_{12}$:

$$\mathbf{x}_{12} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{12}\mathbf{x} \qquad \text{mit:} \qquad \mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Projektionsoperator $\mathbf{P}_{12}$ ist idempotent, d.h. es gilt:

$$\mathbf{P}_{12}^2 = \mathbf{P}_{12}$$

Somit ergibt aus der allgemeinen Bewegung im Raum mit anschliessender Projektion:

$$\boxed{\mathbf{x}'' = \mathbf{P}_{12}\mathbf{x}' = \mathbf{P}_{12}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})}$$

Betrachtet man die Wirkung der Projektion auf **A**:

$$\mathbf{P}_{12}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da es sich um eine ebene Kurve handelt ($x_3 \equiv 0$) kann 3. Spalte entfallen:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Und somit ergibt sich eine Reduktion der Beschreibung auf die Dimension 2:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}'\mathbf{x}'^0 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

mit:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{drehen } (\psi)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}}_{\text{stauchen entlang y}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 \\ s_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{\text{drehen } (\varphi)} = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_3$$

3 Freiheitsgrade: c_1, c_2, c_3 bzw. ψ, c_1, φ

mit: $c_1 = \cos\vartheta$ und damit: $-1 \leq c_1 \leq +1$

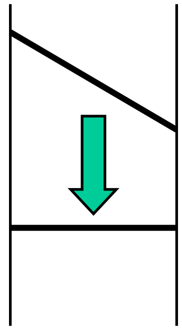
oder ausmultipliziert:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & -c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 \\ s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3 \end{bmatrix}$$

Es ist somit gleichwertig eine ebene Kurve ($x_3 \equiv 0$) im dreidimensionalen Raum zu drehen und dann in die ($\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$)-Ebene zu projezieren oder aber mit einer entsprechenden zweidimensionalen affinen Abbildung zu beschreiben!

Diskussion der Freiheitsgrade:

- Wir sehen jedoch nur drei Freiheitsgrade ψ, c_1, φ. Die allgemeine affine Abbildung hat hingegen 4 (+2 für Verschiebung)!
- Bei der hier beschriebenen Vorgehensweise werden die Objekte nur gestaucht (verkleinert) und nicht vergrößert. Nimmt man nun eine allgemeine Skalierung (vergrößern/verkleinern) als Vorfaktor *k* hinzu, kommt man wieder auf 4 Freiheitsgrade!



$$\underbrace{k}_{\substack{\text{beliebig}\\ \text{skalieren}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{stauchen}\\ \text{entlang } y}} \quad \text{mit: } |c_1| \leq 1$$

Invarianten geometrischer Abbildungen:

Kongruente Abbildungen ($\mathbf{AA}^T=I$) sind ***längentreu***:

$$\left\|\mathbf{x}'\right\|^2 = <\mathbf{x}',\mathbf{x}'> = <\mathbf{Ax},\mathbf{Ax}> = <\mathbf{x},\mathbf{A}^*\mathbf{Ax}> \overset{!}{=} <\mathbf{x},\mathbf{x}> = \left\|\mathbf{x}\right\|^2$$

gilt nur für: $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$ (orthogonale Drehmatrix)

Die Gruppe der Ähnlichkeiten garantiert winkeltreue (konforme) Abbildungen:

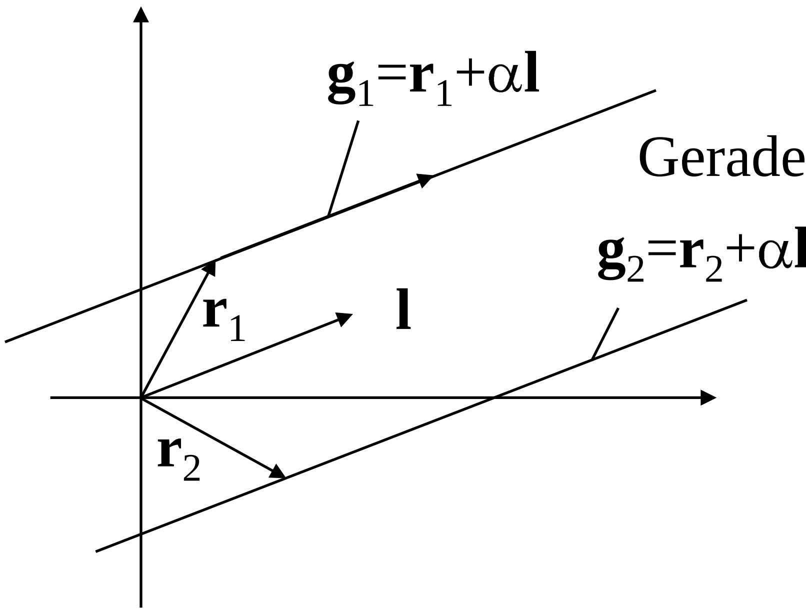
$$\cos\varphi = \frac{<\mathbf{x}',\mathbf{y}'>}{\|\mathbf{x}'\|\|\mathbf{y}'\|} = \frac{<\mathbf{Ax},\mathbf{Ay}>}{<\mathbf{Ax},\mathbf{Ax}>^{1/2}<\mathbf{Ay},\mathbf{Ay}>^{1/2}}$$

mit: $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mu\mathbf{I}$ folgt:

$$\cos\varphi = \frac{<\mathbf{x},\mathbf{A}^*\mathbf{Ay}>}{<\mathbf{x},\mathbf{A}^*\mathbf{Ax}>^{1/2}<\mathbf{y},\mathbf{A}^*\mathbf{Ay}>^{1/2}} =$$

$$\frac{\mu<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{\mu^{1/2}<\mathbf{x},\mathbf{x}>^{1/2}\mu^{1/2}<\mathbf{y},\mathbf{y}>^{1/2}} = \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$

Die Gruppe der affinen Abbildungen erhalten ***Parallelitäten***:



Geradengleichungen

Für alle Punktepaare auf den zu $\mathbf{l}$ parallelen Geraden gilt: $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{l}$

affin transformiert bedeutet das: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}$ und somit:

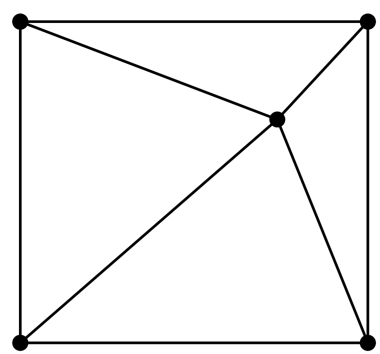
$$\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1' = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{t} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{l} = \alpha\mathbf{l}'$$

dies sind wiederum Punkte auf parallelen Geraden mit der Steigung $\mathbf{l}'$

Interpolation

Bei der Rotation und bei der Translation um Bruchteile des Abtastintervalls ist eine Interpolation der Grauwerte von Bildern erforderlich (nichtgitterkonforme Abbildungen). Dies lässt sich am einfachsten durch

a) die Nächste-Nachbar-Regel realisieren:



Oder besser mit der bilinearen Interpolation:

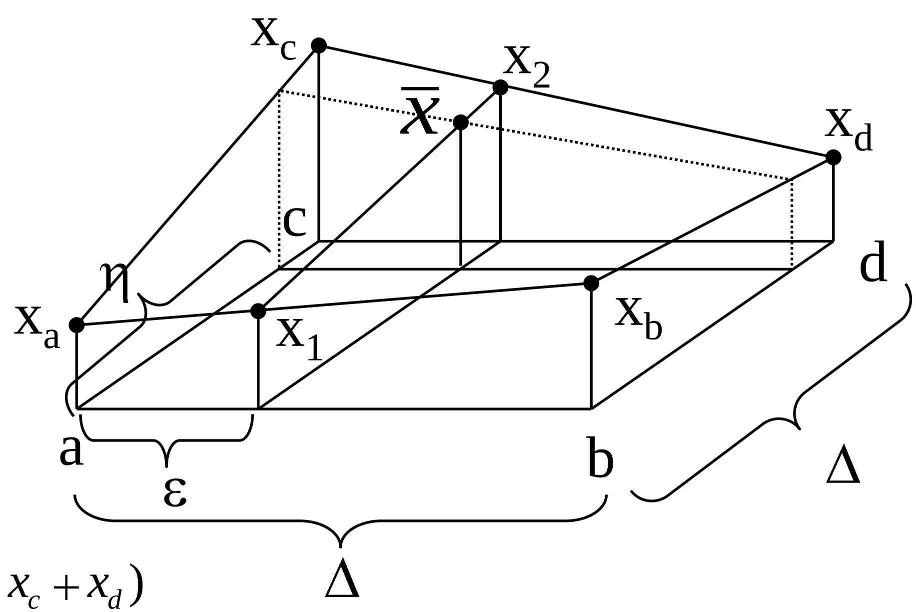
$$x_1 = x_a + \frac{\varepsilon}{\Delta}(x_b - x_a) = \bar{x}(x_a, x_b, \varepsilon)$$

$$x_2 = x_c + \frac{\varepsilon}{\Delta}(x_d - x_c) = \bar{x}(x_c, x_d, \varepsilon)$$

und damit:

$$\bar{x} = x_1 + \frac{\eta}{\Delta}(x_2 - x_1) = \bar{x}(x_1, x_2, \eta) \quad \text{Rekursion}$$

$$= x_a + \frac{\varepsilon}{\Delta}(x_b - x_a) + \frac{\eta}{\Delta}(x_c - x_a) + \frac{\varepsilon\eta}{\Delta^2}(x_a - x_b - x_c + x_d)$$



Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man x_b gegen x_c sowie ε gegen η vertauscht, d.h. man könnte auch zuerst bzgl. (x_a, x_c, η) und (x_b, x_d, η) interpolieren und dann linear über das Ergebnis davon mit ε.