

# Digitale Bildverarbeitung I

Jürgen Wolf  
Bauhöferstr. 48  
79115 Freiburg  
jwolf@informatik

Rudolph Triebel  
Aschenbrennerstr. 9  
79110 Freiburg  
triebel@informatik

Sommersemester 1999





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Zur Historie . . . . .	7
1.2	Anwendungsgebiete der digitalen Bildverarbeitung / Mustererkennung . . . . .	7
1.2.1	Zwei Hauptanwendungsgebiete der DBV . . . . .	8
1.2.2	Allg. Schema zur Bildverarbeitung und Mustererkennung . . . . .	8
1.3	Motivation . . . . .	8
1.3.1	Visuelle Wahrnehmung . . . . .	8
1.3.2	Empfindlichkeit des menschlichen Auges . . . . .	9
1.3.3	Elemente eines DBV-Arbeitsplatzes . . . . .	9
1.3.4	Grenzen der seriellen Verarbeitung . . . . .	10
1.3.5	Methoden zur Reduktion der Rechenzeit . . . . .	10
1.3.6	Besonderheiten der DBV . . . . .	11
1.3.7	Analysis vs. Algebra . . . . .	11
1.4	Schätz-, Detektionstheorie und Mustererkennung . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Signale, Bilder und Volumendaten</b>	<b>15</b>
2.1	Linearer Vektorraum . . . . .	15
2.2	Innenprodukträume . . . . .	17
2.3	Normierte Räume . . . . .	19
2.4	Orthogonale Projektion mit Innenprodukt . . . . .	21
2.5	Basis und Dimension in Innenprodukträumen . . . . .	22
2.6	Lineare Abbildungen (Transformationen) . . . . .	25
2.6.1	Homo(Iso-)morphismen auf algebraischen Strukturen . . . . .	25
2.6.2	Präsentation einer linearen Transformation in $\mathbb{C}^N$ . . . . .	27
2.6.3	Rechnen mit linearen Operatoren . . . . .	28
2.7	Direkte Summe und Projektion . . . . .	29
2.7.1	Beispiel: Zerlegung in Wechselanteil und Gleichanteil . . . . .	30
2.7.2	Projektion auf $\mathcal{X}_0$ . . . . .	31
2.7.3	Beispiel . . . . .	31
2.7.4	Adjungierte Operatoren . . . . .	32
2.7.5	Norm einer linearen Transformation . . . . .	34
2.8	Hilbert-Räume . . . . .	35
2.9	Bestapproximation . . . . .	36
2.10	Die Pseudoinverse Matrix . . . . .	39
2.10.1	Zur Charakterisierung der Lösung . . . . .	40
2.10.2	Charakterisierung der besten Näherungslösung . . . . .	43

<b>3</b>	<b>Bildtransformationen</b>	<b>45</b>
3.1	Grundlagen	45
3.2	Die Fouriertransformation	47
3.2.1	Motivation	47
3.2.2	Drei Definitionen der Fouriertransformation	47
3.2.3	2D-Fourier-Reihe	52
3.2.4	Diskrete Fouriertransformation (DFT)	52
3.2.5	Lineare zweidimensionale Transformation mit separierbarem Kern	55
3.3	Die Walsh-Transformation	57
3.3.1	Sequenzbegrenzte Zeitfunktionen	60
3.3.2	Eigenschaften der Walsh Transformation	60
3.4	Die KLT - optimale unitäre Transformation	60
3.4.1	Vorbemerkungen	60
3.4.2	Hauptmerkmal der KLT	62
3.4.3	Eigenschaften der KLT	62
3.5	Die Diskrete Cosinus Transformation	63
3.5.1	Markov - Prozeß 1. Ordnung	64
3.5.2	Bedeutung der DCT	66
3.6	Methoden zur Bildkodierung	68
3.6.1	Methoden zur Einzelbildkodierung	68
<b>4</b>	<b>Schnelle Algorithmen</b>	<b>71</b>
4.1	Allgemeines	71
4.1.1	Faktorisierung	71
4.1.2	Walsh - Hadamard (FWT)	72
4.1.3	Rechenregeln rekursiver Zerlegungen	72
4.1.4	Konsequenzen der Faktorisierung	74
4.1.5	Butterfly- und deBruign-Graphen	74
4.2	Schnelle Fourier-Transformation (FFT)	75
4.2.1	Gleichwertigkeit Cooley-Tukey / Sande-Tukey	77
4.2.2	Transformation zweier reeller Folgen $a, b$ mit einer komplexen FFT	78
4.2.3	Transformation von $2N$ reellen Werten mit einer komplexen Transformation der Länge $N$	79
4.3	Weitere Anwendung mit dem Faktorisierungsansatz	80
4.4	Zweidimensionale Transformationen	80
4.4.1	Eindimensionale Realisierung der 2D FFT	81
4.4.2	Diskussion der Bilder mit Fourier- und Walsh-Transformation	81
<b>5</b>	<b>Bildfilterung und Korrelation</b>	<b>83</b>
5.1	Einige Beispiele	83
5.1.1	lineare Filterung	83
5.1.2	nichtlineare Filterung	83
5.2	Diskrete Signale und Systeme	83
5.2.1	Übertragungsverhalten linearer, zeitinvarianter diskreter Systeme	86
5.3	Faltung und Korrelation kontinuierlicher Signale	89
5.4	Zweidimensionale Faltung und Korrelation	89

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	5
5.5 Lineare Faltung + Korrelation für endlichdimensionale Signale und Bilder . . . . .	90
<b>A Verschiedenes</b>	<b>91</b>
A.1 Graycode . . . . .	91



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Zur Historie

1920 erste Bilder digital kodiert mit Kabel über Atlantik übertragen. Reduktion des Bildtransportes von über einer Woche (Schiff) auf weniger als 3 Stunden. zunächst 5 Graustufen.

Später während der Blüte der Raumfahrt wachsendes Interesse an BV unter Einsatz leistungsfähiger werdender Rechner.

1964 wurden die ersten Bilder vom Mond durch die Raumfähre Ranger 7 übertragen und mit Rechnern Störungen der Kamera korrigiert. Später stark verbesserte Methoden der Bildkodierung; Bildverbesserung und Bildrestauration bei verschiedenen unbemannten Missionen zum Mond, Mars, Saturn und Jupiter.

Warum digitale Bildverarbeitung?

1. Datenübertragung + Speicherung heute zunehmend digital und nicht mehr analog. Zusätzliche Bildverarbeitung mit dem Rechner naheliegend.
2. DBV ist wesentlich vielseitiger und flexibler als optische oder analoge BV.

Problem: Geschwindigkeit

### 1.2 Anwendungsgebiete der digitalen Bildverarbeitung / Mustererkennung

1. Visuelle Qualitätskontrolle + Produktionsüberwachung, Robotik
2. Bilddatenübertragung + Datenkompression
3. Zeichenerkennung + automatische Dokumentauswertung (Bilder, Texte, Symbolische Auswertung von Landkarten)
4. Medizinische Bildauswertung (Tomographie, Ultraschall, Röntgenbilder)
5. Satellitenbilderauswertung (Fernerkennung, Umweltüberwachung, Meteorologie)

6. Biologie  
(Überwachung von Zellwachstum, Analyse Mikroorganismen)
7. Kriminalistik  
(Fingerabdrücke, Erkennung von Gesichtern)
8. Verbesserung der Auflösung von Elektronen- und Lichtmikroskopen

### 1.2.1 Zwei Hauptanwendungsgebiete der DBV

1. Verbesserung mit Aufbereitung von Bildern zur visuellen Weiterverarbeitung  
(Bildrestauration, Bildverbesserung (image enhancement), digitales Fernsehen, Bildcoding)
2. Verarbeitung von Bildern zur automatischen Auswertung durch den Rechner  
(autonomous machine perception)

Enge Verbindung zu angrenzenden Gebieten; Optisch, Informations- und Signalverarbeitung, ME, KI, Neuronale Netze

### 1.2.2 Allg. Schema zur Bildverarbeitung und Mustererkennung

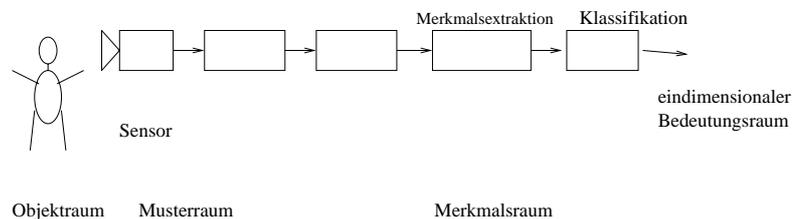


Abbildung 1.1: Allg. Schema zur Bildverarbeitung und Mustererkennung

Im allgemeinen kein geschlossener Vorgang, sondern modulare Vorgehensweise.

#### **Objektraum:**

$\mathbf{x}(\mathbf{t})$  Vektorfunktion in Abhängigkeit von einer vektoriellen unabhängigen Variablen; Z.B. Farbe + Lichtintensität als Funktion von 2 Ortskoordinaten oder: Betrag und Orientierung eines magnetischen Feldes von Ort und Zeit

#### **Musterraum:**

$x(\mathbf{t})$  häufig skalare Funktion von Ort und Zeit (Graubildkamera); Zusätzlich Projektion einer 3D-Szene  $(t_1, t_2, t_3)$  in die Kameraebene  $(t'_1, t'_2)$

## 1.3 Motivation

### 1.3.1 Visuelle Wahrnehmung

**Kenndaten biologischer Systeme** **Netzhaut:** bis zu 160000 Sehzellen/ $mm^2$ , 125 Mio Zellen, 1500 Helligkeitsstufen, Informationsfluß im Auge  $\approx 60GBit/s$

**Neuronen:** Schaltzeiten  $\approx 1ms$ , Laufzeiten  $\approx 120m/s$ , Gehirn insgesamt 10-15 Milliarden Zellen, Verbindungsgrad 1000-10000 Verbindungen pro Zelle

**Technisches System Diodenmatrix:** 1340 x 1037 Dioden  $\approx 1400000$  Dioden auf  $63mm^2$  entspricht 22000 Dioden/ $mm^2$ , Schaltzeiten 1 – 100ns, Laufzeiten  $\approx 30cm/ns!$ , Integrationsdichte 10 -30000 bit/ $mm^2$ , Vernetzungsgrad 1-5

### 1.3.2 Empfindlichkeit des menschlichen Auges

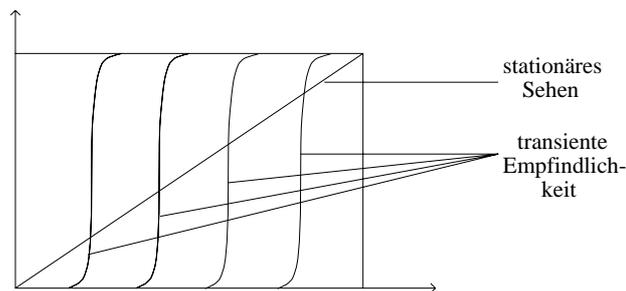


Abbildung 1.2: transiente Empfindlichkeit - stationres Sehen

Der transienten Empfindlichkeit des menschlichen Auges nachempfunden ist ein A/D-Wandler, welcher die most-significant-bits (MSB) durch einen zeitlich adaptiven Schwellwert ersetzt und nur 8 Bit (LSB) zur Wandlung verwendet (6 Dekaden Empfindlichkeit).

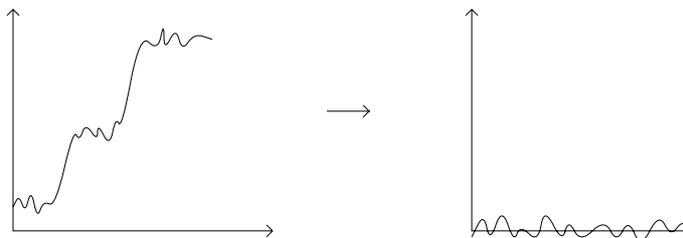


Abbildung 1.3: moderne Kameraentwicklung mit adaptivem Schwellwert

### 1.3.3 Elemente eines DBV-Arbeitsplatzes

**Digitalisierung(TV-Standard):**

- 512 x 512 Bildpunkte  $\Rightarrow 2^9 * 2^9 = 256K Byte$
- 8bit Auflösung des A/D-Wandlers  $\Rightarrow 256$  Graustufen
- 10MHz Abtastrate

**chinesisches Sprichwort:**

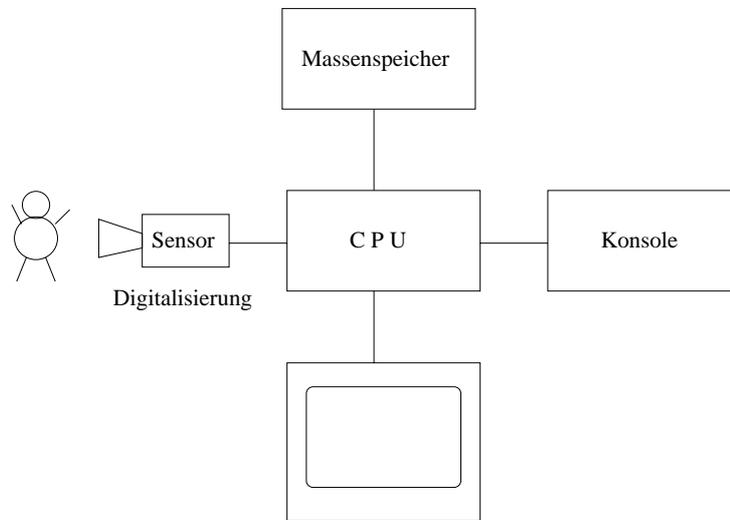


Abbildung 1.4: ein DBV-Arbeitsplatz

”Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte”

Tastatur : 10Byte/s  
 Sprache : 10KByte/s  
 Bilder : 10MByte/s  
 Auge : 10Gbyte/s

#### Beispiele:

1 Operation pro Pixel:  $O(N) \Rightarrow 10 \text{ MFLOP}$   
 lokales Filter(5x5) :  $O(25N) \Rightarrow 250 \text{ MFLOP}$   
 DFT:  $O(N \cdot N) = O(2^{18} \cdot N) \Rightarrow 2^{18} \cdot 10 \text{ MFLOP}$   
 $= 2500 \text{ GFLOP} = 2.5 \text{ TFLOP} = 2.5 \cdot 10^{12} \text{ FLOP}$   
 FFT:  $O(\log N \cdot N) = O(18 \cdot N) \Rightarrow 200 \text{ MFLOP}$

### 1.3.4 Grenzen der seriellen Verarbeitung

**Beispiel:** Korrelation eines Bildes der Dimension  $N = 1000 \times 1000$  Pixel  
direkte Realisierung:

$\approx N^2$  Operationen entspricht  $10^{12} \mu s = 10^6 s = 277h = 11.5$  Tage

### 1.3.5 Methoden zur Reduktion der Rechenzeit

1. Algorithmen mit geeigneter Komplexität entwickeln (schnelle Algorithmen  
 $\Rightarrow O(N \log N)$  entspricht 20s
2. geeignet zur Parallelverarbeitung  $\approx 20$  Zyklen entspr.  $20 \mu s$  (nur linearer Gewinn)

### 1.3.6 Besonderheiten der DBV

Verarbeitung von **örtlich** und **wertemäßig** diskretisierten Signalen und Bildern.

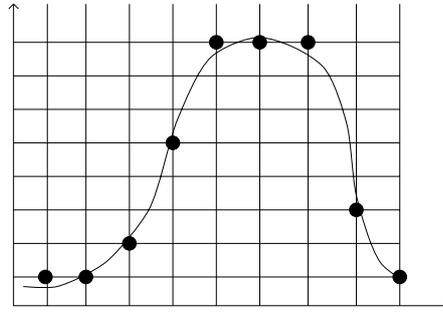


Abbildung 1.5: Abtastung - Quantisierung

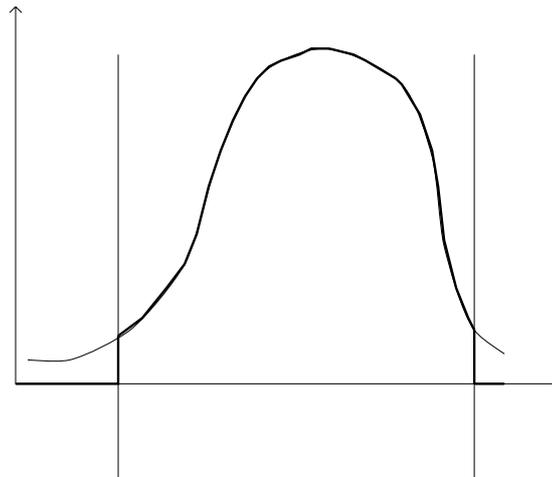


Abbildung 1.6: Fensterung

Welche Probleme treten auf?

Man kann in der Realität nur Signale/Bilder endlicher Dauer/Ausdehnung behandeln (Fensterung, siehe Abb. 1.6). Außerdem können nur endlich viele Signale verarbeitet werden (Abtastung). Es können des weiteren nur endlich viele Signalamplituden diskriminiert werden (Quantisierung, siehe Abb. 1.5).

### 1.3.7 Analysis vs. Algebra

**Verbindung:** Problem der Approximation (Inter- und Extrapolation); Simulation kontinuierlicher Systeme

**Beispiel:** digitale Filterung

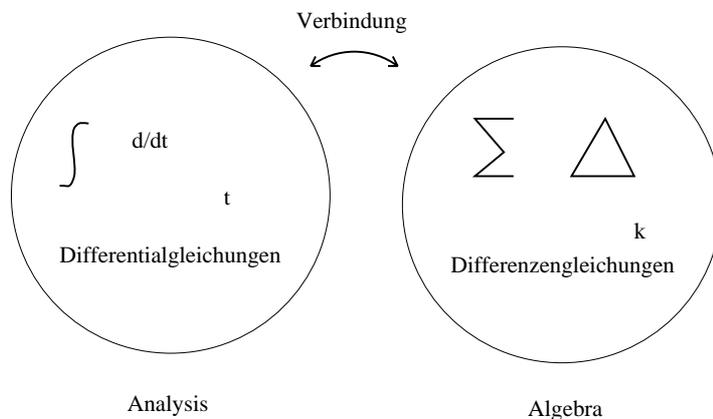


Abbildung 1.7: Verbindung zwischen Algebra und Analysis in der DBV

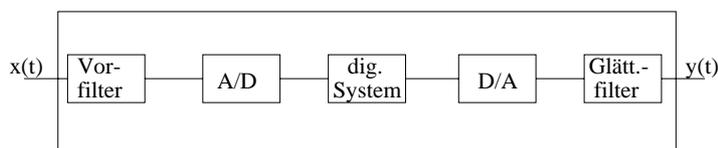


Abbildung 1.8: digitale Filterung analoger Signale

**algebraische Methode der DBV** Historische Entwicklung: Approximation der bekannten analytischen Formulierungen. Daraus entstanden Phänomene wie: Abtastung im Zeit- und Frequenzbereich, Fensterung, Faltungsfehler (aliasing). Später eigenständige Entwicklung der algebraischen Methoden (Zahlentheorie), ohne zwingende Existenz eines direkten Analogons im kontinuierlichen Bereich).

**Beispiele:**

- algebraische Beschreibung der Fouriertransformation
- zahlentheoretische Transformation in endlichen Feldern (Galois-Felder)
- algebraische Faltungsalgorithmen (ohne Rundungsfehler)
- diskrete lageinvariante Transformation (  $\mathbb{CT}$  )
- Kodierungstheorie
- inverse diskrete Radontransformation (Tomographie)
- Filter mit endlicher Impulsantwort (FIR) und streng linearer Phase (konstante Gruppenlaufzeit)

**mathematische Methoden:**

- Polynomialgebra
- chinesischer Restesatz

- Gruppentheorie
- diophantische Gleichungen
- Polynomalgebra über endlichen Körpern (Kodierungstheorie)

## 1.4 Schätz-, Detektionstheorie und Mustererkennung

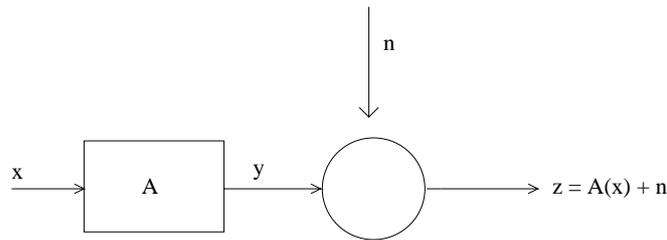


Abbildung 1.9: Unzulänglichkeiten des Sensors

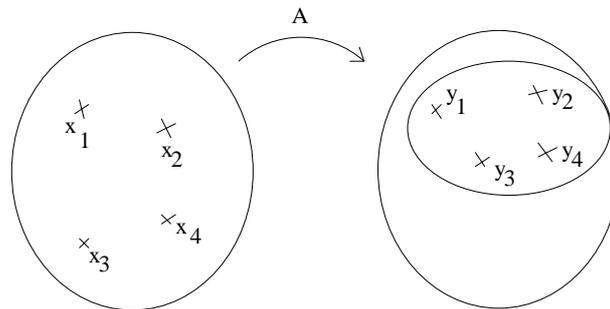


Abbildung 1.10: Abbildung der Merkmalsvektoren in einen Unterraum (Informationsverlust)

Sensor- und Aufnahmetechnik:

$$Z = A(x) + n = y + n$$

A: Dispersion ("Verschmieren"), Projektion, Okklusion (Verdeckung) → Unzulänglichkeiten des Sensors

**Nebenbedingungen:**

$$x = C(x)$$

$x$  ist Fixpunkt des Operators  $C$

z.B.:

- nur positive Intensitäten
- zeit- oder ortsbegrenzt

- diskreter Wertevorrat
- 1. Vollbesetzter Originalraum:  $x \in \mathcal{X}$  (i.a.  $\mathbb{R}^{N \times N}$ )  
 $\Rightarrow$  Signalschätzung (estimation)
- 2. Nur endlich viele Elemente des Signalraumes zugelassen  $x \in \{x_i\} \subset \mathcal{X} \Rightarrow$   
Signaldetektion (detection), z.B. digitale Signalübertragung
- 3. Nur endlich viele Signal- oder Bedeutungsklassen zulässig, d.h.:  $x \in \{\xi_i\} \subset$   
 $\mathcal{X} \Rightarrow$  Mustererkennung, bestmögliche Entscheidung über Äquivalenzklas-  
senzugehörigkeit

Rückschluß von  $\mathbf{z}$  auf  $\mathbf{x}$  (Frage nach Existenz von  $A^{-1}$ ) nicht trivial!! I.a. Defekt in der Abbildung ( ein Teil von  $\mathcal{X}$  ist unwiederbringlich verlorengegangen), schon bei einfacher Dispersion. Verbesserter Rückschluß durch Nutzung von a-priori-Wissen (Nebenbedingungen), i. a. mathematisch schwierig.

## Kapitel 2

# Signale, Bilder und Volumendaten

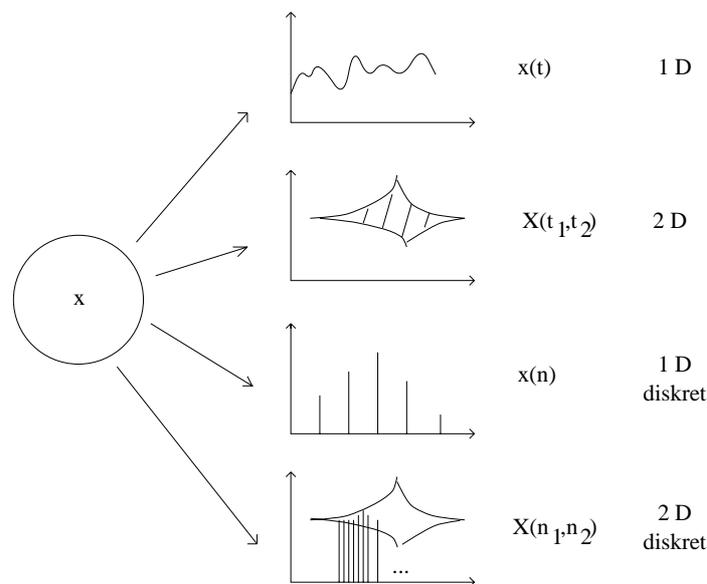


Abbildung 2.1: verschiedene Vektorräume

Im Folgenden sollen kontinuierliche, diskrete ein- und mehrdimensionale Signale und Bilder als Elemente von Vektorräumen aufgefasst werden. Dies ermöglicht eine einheitliche Notation der verschiedenen Signaltypen und der auf ihnen angewendeten Operationen. Doch zunächst zur Definition des Vektorraumes.

### 2.1 Linearer Vektorraum

**Definition 2.1** Eine nichtleere Menge  $\mathcal{X}$  heißt linearer Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$ , wenn für je zwei Elemente  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  aus  $\mathcal{X}$  und jedes  $\alpha$  aus  $\mathbb{K}$  eine

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \begin{cases} \sum x_i y_i \\ \sum \sum x_{ij} y_{ij} \\ \int x(t)y(t)dt \\ \int \int x(t_1, t_2) y(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \end{cases}$$

Abbildung 2.2: Innenprodukt der entsprechenden Vektorräume

Summe  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{X}$  und ein Produkt  $\alpha \mathbf{x} \in \mathcal{X}$  definiert sind, sodass die folgenden Bedingungen (die sog. Vektorraumaxiome) erfüllt sind:

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad \in \mathcal{X}$  (kommutativ)
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X} : \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$  (assoziativ)
- $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{X} : \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$  (es existiert Nullelement)
- $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} : \exists (-\mathbf{x}) \in \mathcal{X} : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  (inverses Element der Addition)
- $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$  (assoziativ)
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}$  (distributiv I)
- $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x}$  (distributiv II)
- $\exists 1 \in \mathbb{K} : 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$  (Einselement)

**Definition 2.2** Eine nichtleere Teilmenge  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  heißt Untervektorraum von  $\mathcal{X}$ , wenn gilt:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}' \Rightarrow \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \mathcal{X}' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

### Beispiele

- Der Raum  $\mathbb{K}^N$  der geordneten  $N$ -Tupel über dem Zahlkörper  $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K}^N = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) | v_i \in \mathbb{K}\},$$

in dem die Operationen der Addition und der Multiplikation mit einem skalaren Faktor definiert sind:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

- Der Raum der reellwertigen Funktionen im Intervall  $[a, b]$

$$F[a, b] = \{f | t \rightarrow f(t) \in \mathbb{R}, t \in [a, b]\}$$

wobei Addition und Multiplikation durch die Ausführung an den Funktionswerten erklärt sind:  $x(t) + y(t), \alpha x(t)$   
(z.B. Signale in der Systemtheorie  $\{f(t)\}$ )

## 2.2 Innenprodukträume

**Definition 2.3** Ein Vektorraum  $\mathcal{X}$  über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  heißt Innenproduktraum oder prähilbertscher Raum, wenn jedem Paar  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  von Elementen aus  $\mathcal{X}$  eine Zahl  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  (ein Innen- oder Skalarprodukt) aus  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  so zugeordnet ist, dass die folgenden Regeln gelten:

1.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$  (reell: kommutativ, komplex: hermitesch)
2.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$  (distributiv)
3.  $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  (in Faktor  $\alpha$  homogen)  
(aus 1.  $\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha^* \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ )
4.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ ;  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$  (positiv definit)

### Beispiele

- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$  (Vektorraum über dem komplexen Zahlenkörper der Dimension  $N$ )

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i^* = \mathbf{y}^* \mathbf{x}$$

falls  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ , dann ist  $\mathbb{R}^N$  der *Euklidische Raum*

- Mit  $\mathcal{C}[a, b]$  bezeichnet man die Menge der komplexwertigen stetigen Funktionen im Intervall  $[a, b]$ . Dann erfüllt

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t) y(t)^* dt$$

für  $x(t), y(t) \in \mathcal{C}[a, b]$  die Forderungen an ein Skalarprodukt.

- Auf den Vektorräumen der ein- und zweidimensionalen diskreten und analogen Signale (Bilder) können folgende Innenprodukte definiert werden:

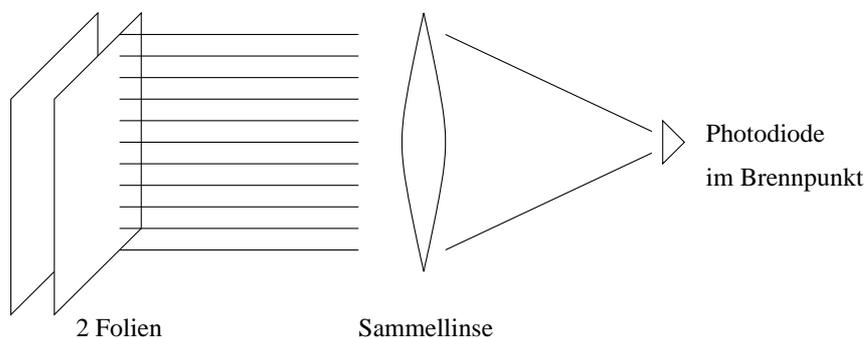
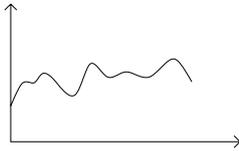
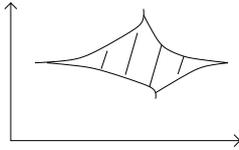
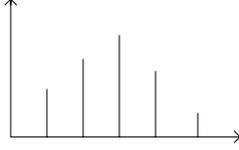
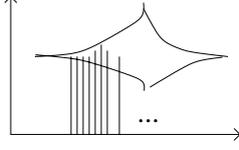


Abbildung 2.3: optische Interpretation des Skalarproduktes

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)^* dt$$


$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1, t_2)y^*(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$


$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_i^*$$


$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{ij} y_{ij}^*$$


**Anmerkung:** Da jeder der genannten Vektorräume isomorph zum Euklidischen Raum ist, können die Verhältnisse in diesen Räumen anhand derer des Euklidischen Raumes veranschaulicht werden.

**Optische Veranschaulichung des Skalarproduktes** Drückt man zwei Bilder auf Folien, die man aufeinanderlegt und vor eine weiße Lichtquelle hält, so kann der mit einer Sammellinse gebündelte austretende Lichtstrahl als Skalarprodukt der beiden Bilder interpretiert werden (siehe Abb. 2.3).

Mithilfe des Skalarproduktes kann man die Beziehung zweier Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  genauer untersuchen. Dabei hilft die folgende

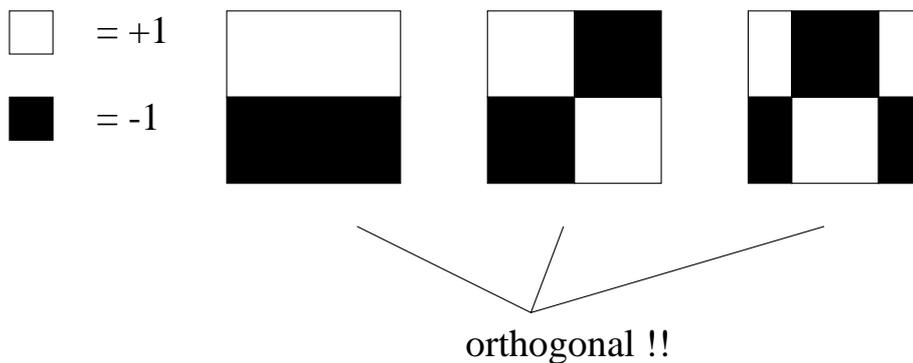


Abbildung 2.4: zueinander orthogonale Bilder

**Definition 2.4** Zwei Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  eines Innenproduktraums  $\mathcal{X}$  heißen orthogonal (Notation:  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ) wenn gilt:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

**Beispiel** Die drei Bilder aus Abb. 2.4 sind jeweils zueinander orthogonal, da  $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij}$  für  $i, j \in 1, 2, 3$ .

## 2.3 Normierte Räume

**Definition 2.5** Sei  $\mathcal{X}$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Eine Abbildung von  $\mathcal{X}$  nach  $\mathbb{R}$  heißt Norm (Notation:  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ ), falls gilt:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ;  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$  (positiv definit)
- $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (Dreiecksungleichung; Gleichheit nur bei Kolinearität der Vektoren)

$(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  heißt dann ein normierter Raum.

### Beispiele

- $l_p(n) : \|\mathbf{x}\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \quad p \neq 2, x_i \in \mathbb{C}$
- $l_2(\infty) \hat{=} \text{Hilbertscher Folgenraum über } \mathbb{C}$
- $p = 1 : \|\mathbf{x}\| = \sum |x_i| \quad \text{Betragsnorm}$
- $p = \infty : \|\mathbf{x}\| = \sup_{i=1}^{\infty} |x_i|$  bzw.  $\|\mathbf{x}\| = \max_i^n |x_i|$
- $p = 2 : \|\mathbf{x}\| = (\sum |x_i|^2)^{1/2}$   
 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \text{Euklidischer Raum}$
- $L_p[a, b] : \|x(t)\| = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{1/p}$

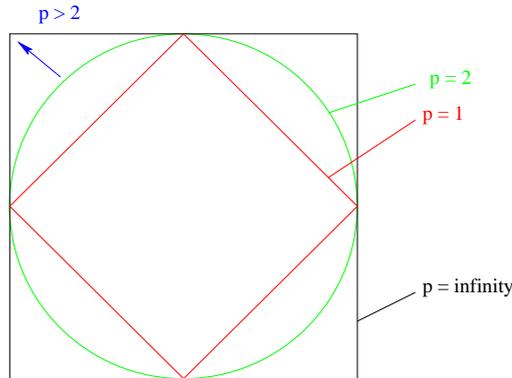


Abbildung 2.5: Einheitskugeln zu verschiedenen Normen

- $p = 1$  ( $L_1[a, b]$ ) :  $\|x(t)\| = \int_a^b |x(t)| dt$
- $p = \infty$  ( $L_\infty$ ) :  $\|x(t)\| = \sup |x(t)| t \in (\infty, -\infty)$   
bzw.  $\|x(t)\| = \max |x(t)| t \in [a, b]$
- $p = 2$  ( $L_2[a, b]$ ) : Hilbertscher Raum der im Intervall  $t \in [a, b]$  quadratisch integrierbaren Funktionen

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)y^*(t)dt \quad \int \triangleq \text{Lebesgue Integral}$$

Abbildung 2.5 zeigt die *Einheitskugeln* zu den Normen von  $l_1(2)$ ,  $l_2(2)$  und  $l_\infty(2)$  (die Einheitskugel ist die Menge der Vektoren  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  mit  $\|\mathbf{x}\| = 1$ ). Es gilt nun der folgende

**Satz 2.1** Sei  $\mathcal{X}$  ein Innenproduktraum. Dann erfüllt die Abbildung  $\|\cdot\| : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

die Normbedingungen (siehe Definition 2.5).

**Beweis:**

Einfach. □

Das bedeutet, dass jeder Innenproduktraum mit der so definierten Norm ein normierter Raum wird. Außerdem induziert jede Norm auch eine *Metrik*, und zwar wie folgt:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Anschaulich kann eine Metrik als Abstand oder als Maß für den Unterschied zweier Vektoren interpretiert werden.

**Definition 2.6** Eine Menge von Vektoren  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  heißt orthonormal, wenn für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j : \quad \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Das Wort *orthonormal* setzt sich dabei aus *orthogonal* und *normiert* zusammen (wegen  $\|\mathbf{x}_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$ )

**Satz 2.2** In einem Innenproduktraum gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

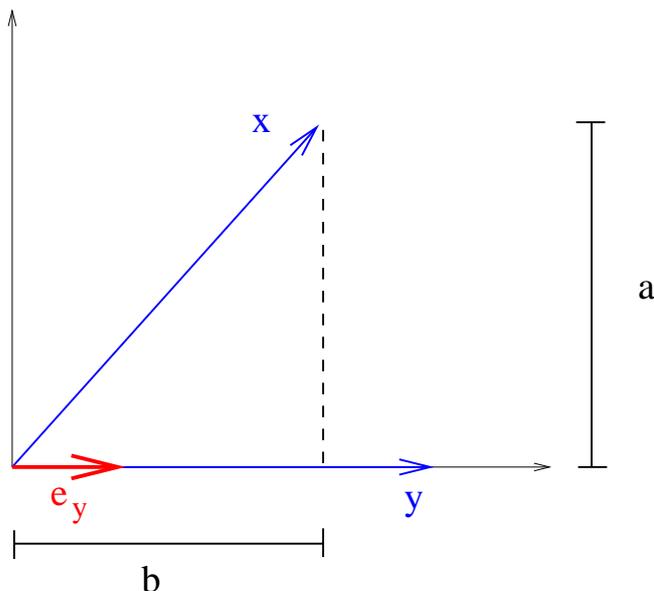
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &\leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \\ \left( \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|}{\|\mathbf{y}\|} \right) &\leq \|\mathbf{x}\| \\ (\text{Projektion} \leq 1 \text{ f\"ur normierte Vektoren}) \end{aligned}$$

**Beispiel** Im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^N$  gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi \Rightarrow |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \\ (\text{Gleichheit nur bei Kolinearit\"at}) \end{aligned}$$

## 2.4 Orthogonale Projektion mit Innenprodukt

Orthogonale Projektion von  $\mathbf{x}$  auf  $\mathbf{y}$  mit Innenprodukt:



Zur obigen Abbildung:  $\mathbf{e}_y = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$   $a = \|\mathbf{x}\| \sin \phi$   $b = \|\mathbf{x}\| \cos \phi$   
 $\mathbf{z}$  ist Vektor in Richtung  $\mathbf{e}_y$  mit Länge  $b$ :  $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}\| \cos \phi$

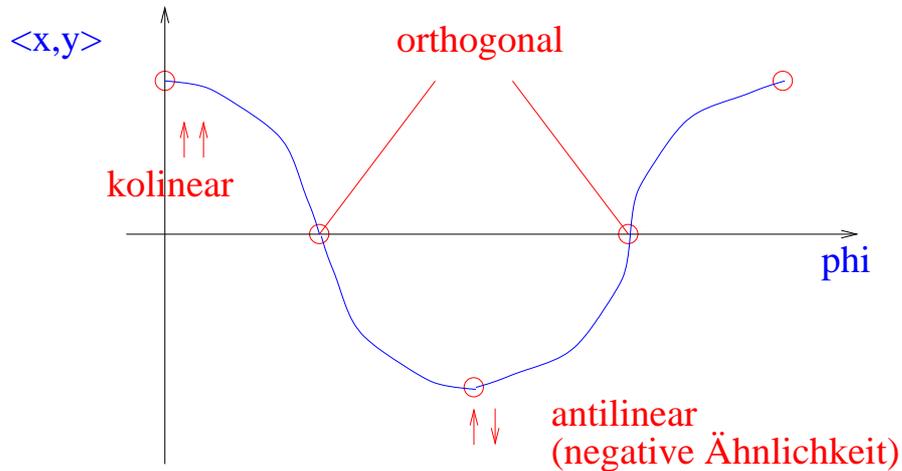
$$\mathbf{z} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|} \mathbf{e}_y = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|} \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_y \rangle \mathbf{e}_y$$

Innenprodukt  $\hat{=}$  Maß für die Ähnlichkeit zwischen Vektoren  
 Über Metrik: (Fehler, Maß für Unterschied bzw. Abweichung)

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ reell} \end{aligned}$$

normierte Signale:  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$ :

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 = 2(1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \quad \text{Fehler} \sim 1\text{-Ähnlichkeit}$$



- a)  $\mathbf{x} \uparrow \uparrow \mathbf{y} \Rightarrow \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$  Maximalwert  
 b)  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Rightarrow \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2 \cdot 0$  mittlerer Wert  
 c)  $\mathbf{x} \downarrow \uparrow \mathbf{y} \Rightarrow \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$  Minimalwert

Es gilt der verallgemeinerte Satz des Pythagoras:

$\mathbf{x}_i$  sei ein Menge von Vektoren

$$\Rightarrow \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{x}_n\|^2$$

Im unitären Raum gilt die *Parallelogrammgleichung*:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

Daraus folgt der

**Satz 2.3** Bei normierten, reelwertigen Bildern/ Signalen stehen die Summen- und Differenzbilder senkrecht aufeinander.

**Beweis:**

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 = 0$$

□

## 2.5 Basis und Dimension in Innenprodukträumen

**Definition 2.7** Eine Menge von Vektoren  $\{\mathbf{x}_i\} := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\} \in \mathcal{X}$  ist linear unabhängig, falls das homogene Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

(oder in Matrix-Schreibweise

$$\mathbf{X} \cdot \alpha = \mathbf{0}$$

außer der trivialen Lösung  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$  keine Lösung für die  $\alpha_i$  besitzt.

**oder:** Die Vektoren  $\{\mathbf{x}_i\}$  sind *linear abhängig*, wenn einer von ihnen als Linearkombination der anderen dargestellt werden kann.

**oder:** Die Vektoren  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\} \in \mathbb{C}^n$  sind *linear unabhängig* gdw

$$\det \mathbf{X} \neq 0$$

**oder:** Die Vektoren  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\} \in \mathbb{C}^n$  mit  $r \leq n$  sind *linear unabhängig*, falls  $\mathbf{X}$  den Rang  $r$  besitzt. (Eine Matrix hat den Rang  $r$ , falls sie mindestens eine  $r$ -reihige reguläre Untermatrix besitzt und alle höherreihigen Untermatrizen von  $\mathbf{X}$  singulär sind.)

**Definition 2.8** Eine Menge von Vektoren  $\{\mathbf{x}_i\}$  spannt einen Vektorraum  $\mathcal{X}$  auf, falls alle Vektoren in  $\mathcal{X}$  als Linearkombination dieser Vektoren dargestellt werden können.

$S[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$  ist dann der Vektorraum, welcher durch die Vektoren  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  aufgespannt wird.

**Definition 2.9** Die Menge von Vektoren  $\{e_i\}$  eines linearen Vektorraums  $\mathcal{X}$  bildet eine Basis, wenn die Vektoren linear unabhängig sind und  $\mathcal{X}$  aufspannen.

**Beispiel**

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4$  spannen  $\mathcal{E}^3$  auf, bilden aber keine Basis.

Die Anzahl von Elementen einer Basis nennt man die *Dimension* eines Vektorraums. In  $\mathbb{C}^n$  bildet ein jeder Satz von linear unabhängigen Vektoren, die nicht der Nullvektor sind, eine Basis.

**Definition 2.10** Eine Basis  $\{e_i\}$  heißt Orthonormalbasis (ONB), falls gilt:

$$\langle e_i, e_k \rangle = \delta_{ik}.$$

**Beispiele** Die folgenden Vektormengen bilden jeweils eine Orthonormalbasis des entsprechenden Vektorraums:

$$1. \ \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \text{ in } l_2(n) \text{ mit } \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \{e_1, e_2, \dots\} \text{ in } l_2(\infty) \text{ mit } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$3. \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} e^{j2\pi i \frac{t}{T}} \right\} \text{ in } L_2[0, T] \text{ über Körper } \mathbb{C} \text{ (spezielle Fourierreihe, die } L_2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \text{ abbildet auf } l_2(\infty))$$

aber:

$$v_i = \left\{ \frac{\sin a(t - iT)}{\pi(t - iT)} \right\}, \quad a = \frac{\pi}{T}$$

ist orthogonal in  $L_2(-\infty, \infty)$ , denn es gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases},$$

jedoch spannen diese Funktionen (die sogenannten *Spaltenfunktionen*) nicht den ganzen Raum  $L_2(-\infty, \infty)$  auf, sondern lediglich den Unterraum der bandbegrenzten Signale ( $|F(\omega)| = 0$  für  $|\omega| \geq a$ ).

Bei vollständigen ONBs besteht Isomorphie zwischen allgemeinen Hilbert-Räumen und dem  $n$ -dimensionalen Zahlenraum bzw. dem Hilbertschen Folgenraum (damit auch Isometrie). Somit ist die Erklärung schwieriger Zusammenhänge im Funktionenraum sehr anschaulich (geometrisch) im Euklidischen Raum.

**Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmid** Problem:

gegeben: Basis  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{C}^n$

gesucht: ONB  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

**Berechnungsverfahren:**

$$\begin{aligned} e_1' &= x_1 & e_1 &= e_1' / \|e_1'\| \\ e_2' &= x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1 & e_2 &= e_2' / \|e_2'\| \\ e_3' &= x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2 & e_3 &= e_3' / \|e_3'\| \\ &\vdots & & \\ e_n' &= x_n - \langle x_n, e_1 \rangle e_1 - \langle x_n, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle x_n, e_{n-1} \rangle e_{n-1} & e_n &= e_n' / \|e_n'\| \end{aligned}$$

**Beispiel** Die Menge  $P_n$  der reellen Polynomfunktionen vom Grade  $\leq n$

$$t \mapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

mit  $t, a_i \in \mathbb{R}, m \leq n$  bilden einen reellwertigen Vektorraum der Dimension  $n+1$ . Die  $n+1$  Funktionen  $t \mapsto t^n$  bilden eine Basis von  $P_n$

**Übung:**  $\{x_1, x_2, \dots\} = \{1, t, t^2, \dots\} \in L_2[-1, +1]$  sind linear unabhängige Vektoren. Was erhält man bei Anwendung des Gram-Schmid-Verfahrens?

## 2.6 Lineare Abbildungen (Transformationen)

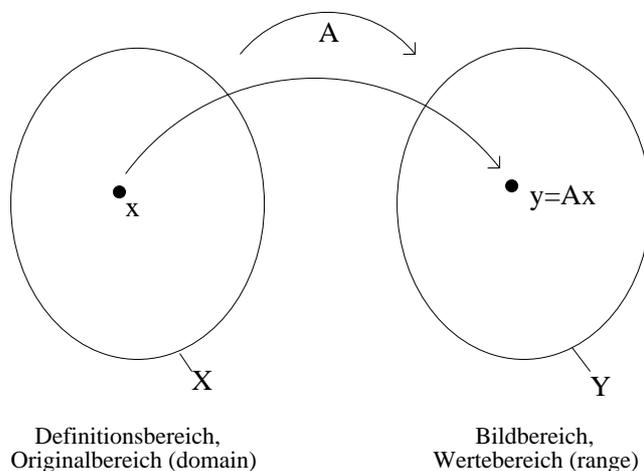


Abbildung 2.6: Veranschaulichung einer linearen Transformation

**Definition 2.11** Die Abbildung  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  des Vektorraumes  $\mathcal{X}$  auf  $\mathcal{Y}$  heißt linear oder ein Vektorraumhomomorphismus, falls

- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$  (additiv, Überlagerungsprinzip)
- $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$  (homogen, Verstärkungsprinzip)

oder:  $A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha A(\mathbf{x}_1) + \beta A(\mathbf{x}_2)$

### 2.6.1 Homo(Iso-)morphismen auf algebraischen Strukturen

Homomorphismen sind Abbildungen auf algebraischen Strukturen, die die Struktur erhalten:

$$F : (\mathcal{X}, \phi_1, \phi_2, \dots) \rightarrow (\mathcal{Y}, \psi_1, \psi_2, \dots),$$

wobei  $\phi_1, \phi_2, \dots, \psi_1, \psi_2, \dots$  2-stellige Verknüpfungen sind und es gilt:

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X} \quad F(\mathbf{x}_1 \phi_i \mathbf{x}_2) = F(\mathbf{x}_1) \psi_i F(\mathbf{x}_2)$$

” $\mathcal{Y}$  ist homomorphes Bild von  $\mathcal{X}$ .”

Es ist also vom Ergebnis her gleichgültig, ob man zuerst Operationen in  $\mathcal{X}$  und dann die Abbildung, oder zuerst die Abbildung und dann die entsprechenden Operationen in  $\mathcal{Y}$  ausführt. Es ist jedoch *nicht* gleichgültig bezüglich des Aufwandes. Falls  $F$  eine umkehrbar eindeutige (bijektive) Abbildung ist, dann ist  $F$  ein *Isomorphismus*, d.h.:

$$\mathbf{x}_1 \phi \mathbf{x}_2 = F^{-1}(F(\mathbf{x}_1) \psi F(\mathbf{x}_2))$$

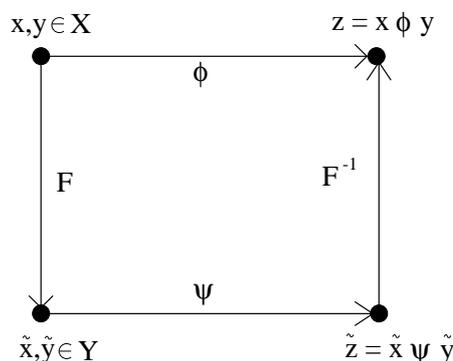


Abbildung 2.7: Umweg über isomophen Vektorraum Y

**Beispiele**  $F : x \mapsto \log x$ ,  $\log(xy) = \log x + \log y$ ;  $(\mathbb{R}^+, *) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$  (Gruppenhomomorphismus, Logarithmstabelle, Rechenschieber)

oder:  $F : x(t) \rightarrow \tilde{x}(f)$ ,  $(L_2, *) \rightarrow (L_2, \cdot)$  (Isomorphismus der Fouriertheorie im Hilbertraum  $L_2$ )

oder: Fourierreihe:  $(L_2, \langle \cdot \rangle) \rightarrow (l_2, \langle \cdot \rangle)$

Isomorphie zwischen allen Hilberträumen und dem  $n$ -dimensionalen Zahlenraum bei der Entwicklung in einem Basissystem (Fourier-Entwicklung)  $\mathcal{F} : L_2 \rightarrow l_2(\infty)$ .

**Beispiele** (Anwendungen in der linearen Systemtheorie)

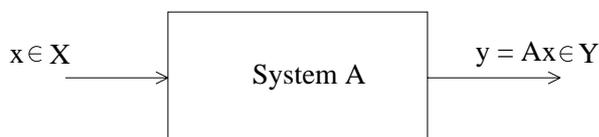


Abbildung 2.8: Auswirkung des Systems A auf Signal x

1.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)dt$$

$$= h(t) * x(t)$$

Abbildung  $L_1 \rightarrow L_2$

2.

$$\mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ bzw. } \mathbb{R}^m \text{ mit } \dim A = m \times n$$

Beispiel: Töplitz-Matrix

3.  $L_1 \rightarrow L_2$ , Fouriertransformation

$$y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Der Wertebereich des linearen Operators  $A$  heißt  $\mathcal{R}(A)$  (range):

$$\mathcal{R}(A) := \{\mathbf{y} = A\mathbf{x} \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$$

$\mathbf{y} = \mathcal{R}(A)$  ist das Bild des Vektorraumes  $\mathcal{X}$  unter der Abbildung  $A$ . Seine Dimension wird als *Rang* von  $A$  bezeichnet. Im allgemeinen Abbildung auf Unterraum! Der Kern oder Nullraum  $\mathcal{N}(A)$  eines linearen Operators  $A$  ist die Menge aller Vektoren  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ , welche durch  $A$  auf das Nullelement von  $\mathcal{Y}$  abgebildet werden.

$$\mathcal{N}(A) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid A\mathbf{x} = 0\}$$

$\dim \mathcal{N}(A) \hat{=}$  Nulldefekt, Rangabfall, Nullität  
Es gilt:

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{X}$$

### 2.6.2 Präsentation einer linearen Transformation in $\mathbb{C}^N$

**Satz 2.4** Gegeben: Basen  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$  von  $\mathbb{C}^N$  und  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$  von  $\mathbb{C}^M$ . Die lineare Transformation  $\mathcal{L} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^M$  wird repräsentiert durch eine Matrix  $L = \{\lambda_{ji}\}$ , deren  $i$ -te Spalten aus den Komponenten  $\mathcal{L}\mathbf{u}_i$  relativ zur Basis  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$  besteht.

**Beweis:**

Sei  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$  eine Basis von  $\mathbb{C}^N$  und  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$  eine Basis von  $\mathbb{C}^M$ . Ein beliebiger Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  hat dann eine eindeutige Darstellung in Basis  $\{\mathbf{u}_i\}$ , also:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \xi_i \mathbf{u}_i$$

Der Vektor  $\mathcal{L}\mathbf{u}_i$  ist Element von  $\mathbb{C}^M$  und hat eine eindeutige Darstellung in  $\{\mathbf{v}_i\}$ , also

$$\mathcal{L}\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^M \lambda_{ji} \mathbf{v}_j \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Unter Anwendung der Regeln für lineare Transformationen gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathcal{L}\mathbf{x} &= \mathcal{L} \sum_{i=1}^N \xi_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^N \xi_i \mathcal{L}\mathbf{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \xi_i \sum_{j=1}^M \lambda_{ji} \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \lambda_{ji} \xi_i \mathbf{v}_j \end{aligned}$$

$$\text{d.h.: } \mathbf{y} = \sum_{j=1}^M \eta_j \mathbf{v}_j$$

Die Komponenten  $\eta_j$  von  $\mathbf{y}$  bezüglich der Basis  $\{\mathbf{v}_i\}$  erhält man aus den Entwicklungskoeffizienten  $\xi_i$  der Basis  $\{\mathbf{u}_i\}$  in  $\mathbb{C}^N$  durch die Beziehung

$$\eta_j = \sum_{i=1}^N \lambda_{ij} \xi_i$$

bzw.

$$\boldsymbol{\eta} = \mathcal{L} \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad \dim \mathcal{L} = M \times N$$

□

### 2.6.3 Rechnen mit linearen Operatoren

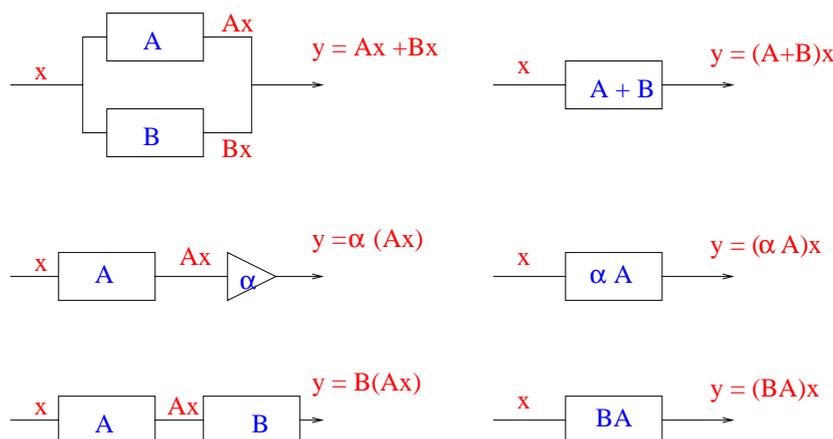
Die Menge der linearen Operatoren genügen selbst den Gesetzmäßigkeiten eines Vektorraumes, d.h. Addition und Multiplikation mit skalarem Faktor sind erklärt. Nimmt man zusätzlich die Komposition von Operatoren (Produkt)  $A \circ B$  (Hintereinanderausführung) hinzu, so erfüllen lineare Operatoren die Gesetzmäßigkeiten einer im allgemeinen nicht kommutativen Algebra:

- |    |   |                        |
|----|---|------------------------|
| 1a | $(A + B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}$ | Addition               |
| 1b | $(\alpha A)\mathbf{x} = \alpha(A\mathbf{x})$    | skalare Mult.          |
| 2a | $A(BC) = (AB)C$                                 | assoziativ             |
| 2b | $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$        |                        |
| 2c | $A(B + C) = AB + AC$                            |                        |
| 2d | $(A + B)C = AC + BC$                            |                        |
| 2e | $BA \neq AB$                                    | i. a. nicht kommutativ |

Das Einselement bzgl. der Multiplikation ist der Identitätsoperator

$$I\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

⇒ Parallelschaltung, Verstärkungsprinzip + Kettenschaltung (Anwendung in der Systemtheorie, Elektrotechnik):



**Beispiel:**

Eine lineare Transformation im  $\mathbb{C}^N$  wird repräsentiert durch eine Matrix  $\mathbf{A}$ . Die Regeln der Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation genügen den Regeln der Addition und Multiplikation linearer Operatoren:

$$\begin{aligned} A + B &: \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ A \circ B &: \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

## 2.7 Direkte Summe und Projektion

**Definition 2.12**  $\mathcal{Y}$  und  $\mathcal{Z}$  seien zwei Unterräume von  $\mathcal{X}$ .  $\mathcal{X}$  ist die direkte Summe von  $\mathcal{Y}$  und  $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$$

falls alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  eindeutig als Summe  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$  und  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  und  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$  geschrieben werden können.

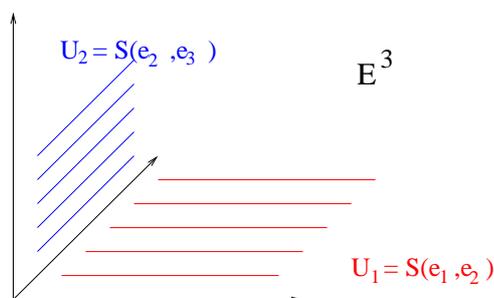
**Satz 2.5**  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z} \Leftrightarrow \mathcal{Y}$  und  $\mathcal{Z}$  haben nur den Nullvektor gemeinsam und  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  kann als Summe der Vektoren  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  und  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$  dargestellt werden.

Als Summe von Unterräumen:

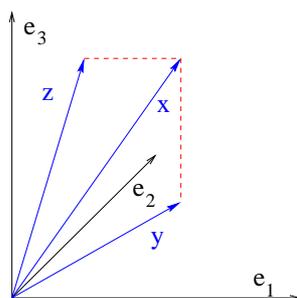
$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} + \mathcal{Z}$$

bezeichnet man den von der Vereinigung von  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  aufgespannten Raum.

**Beispiel im  $E^3$ :**



$$\begin{aligned} E^3 &= U_1 + U_2 \quad (\alpha e_2 \text{ gemeinsam!!!}) \\ \text{aber } E^3 &= U_1 \oplus S(e_3) \\ &= U_2 \oplus S(e_1) \end{aligned}$$



$$\text{mehrdeutige Zerlegungen: } \mathbf{x} = \mathbf{y} + \alpha \mathbf{e}_3 = \mathbf{z} + \beta \mathbf{e}_1$$

Eine wichtige Operatorenklasse sind die Projektionen oder Projektoren.

**Definition 2.13** Es sei  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$  und somit  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$  ( $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ ). Eine lineare Abbildung  $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$   $P\mathbf{x} := \mathbf{y}$  heißt Projektion von  $\mathcal{X}$  auf  $\mathcal{Y}$  entlang  $\mathcal{Z}$  genau dann, wenn  $P$  idempotent ist, d.h.:

$$P = P^2$$

Es gilt dann:

$$\dim \mathcal{X} = \dim \mathcal{Y} + \dim \mathcal{Z}$$

$I - P$  projiziert dann  $\mathcal{X}$  entlang  $\mathcal{Y}$  auf  $\mathcal{Z}$ :

$$\mathbf{z} = (I - P)\mathbf{x}$$

und somit gilt die Zerlegung:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= P\mathbf{x} + (I - P)\mathbf{x} \\ &= \mathbf{y} + \mathbf{z} \\ &= P\mathbf{x} + Q\mathbf{x} \end{aligned}$$

Es gilt somit:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \mathcal{R}(P) = \{\mathbf{x} | P\mathbf{x} = \mathbf{x}\} \\ \mathcal{Z} &= \mathcal{N}(P) = \{\mathbf{x} | P\mathbf{x} = 0\} \end{aligned}$$

Man nennt  $\mathcal{Z}$  auch einen *Komplementärraum* zu  $\mathcal{Y}$  und umgekehrt. Falls  $\mathcal{Y} \perp \mathcal{Z}$  ( $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}^\perp$ ), dann ist es ein *orthogonaler Komplementärraum*

$$\Rightarrow \mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z}^\perp$$

Dann gilt Satz von Pythagoras:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2$$

**Definition 2.14**  $P$  ist eine orthogonale Projektion, wenn:

$$P^2 = P \quad \text{und} \quad P^* = P \quad (P^* \hat{=} \text{adjungierter Operator})$$

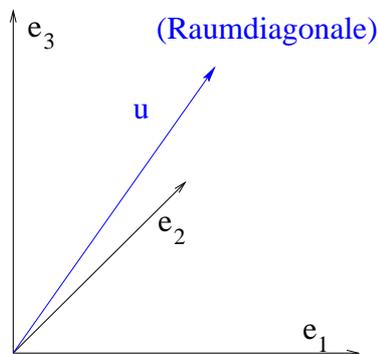
### 2.7.1 Beispiel: Zerlegung in Wechselanteil und Gleichanteil

Zerlegung eines Signals  $\mathbf{x}$  in einen Wechselanteil  $\mathbf{x}'$  und einen Gleichanteil  $\mathbf{x}_0$  im  $\mathbb{R}^N$ :

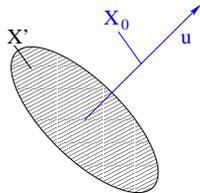
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0 \\ \mathcal{X} &= \mathcal{X}' \oplus \mathcal{X}_0 \quad \text{mit } \mathcal{X}' = \mathcal{X}_0^\perp \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} \Rightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}_0\|^2 \\ \text{Gesamtenergie} = \text{Summe der Wechselenergie} + \text{Gleichenergie} \end{array} \right)$$

Gleichanteil im  $\mathbb{R}^3$ :



$$\|\mathbf{u}\| = 1 \Rightarrow \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (im } \mathbb{R}^3) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (im } \mathbb{R}^N)$$



$$\mathcal{X}_0 = \text{Span}(\mathbf{u})$$

### 2.7.2 Projektion auf $\mathcal{X}_0$

$$\mathbf{x}_0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} \quad (\text{Gleichanteil})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N x_i \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} \quad (\text{Wechselanteil nach Gram-Schmidt})$$

$$\mathbf{x}' \perp \mathbf{x}_0$$

allgemeiner:

$$\mathbf{x}_0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} = \mathbf{u} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$$

und zwar wegen  $a \langle b, c \rangle = \underbrace{(a \cdot b^T)}_{\substack{\text{dyad.} \\ \text{Prod.}}} c$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{x}_0 &= (\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} \quad \text{mit } \{P_{ij}\} = 1/N \\ \mathbf{x}' &= (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{x} = \mathbf{a}\mathbf{x} \end{aligned}$$

### 2.7.3 Beispiel

$$N = 4$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

### Normierung eines Signals (Bildes) durch Projektion

$$x(t) = x'(t) + x_o = k \cdot x''(t) + x_o$$

$$\begin{array}{ll} P_1 \text{ (Projektion auf } \mathcal{X}_0\text{):} & x_o = \langle x, u \rangle u = P_1 x \\ \text{(Projektion auf } \mathcal{X}'\text{):} & x' = Qx = (I - P)x \\ P_2 \text{ (Projektion auf Einheitskugel):} & x'' = \frac{x'}{\|x'\|} = \frac{Qx}{\|Qx\|} \end{array}$$

**Bemerkung:**  $P_2$  ist nicht linear, denn:

$$\frac{x+y}{\|x+y\|} = \frac{x}{\|x+y\|} + \frac{y}{\|x+y\|} \neq \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}$$

D.h.: Zuerst (lineare) Projektion auf den Unterraum  $\mathcal{X}'$  (Helligkeitsnormierung bei Bildern) und dann Normierung auf Länge 1 ( $\|\cdot\| = 1$ , Kontrastnormierung, konstante Energie).

### 2.7.4 Adjungierte Operatoren

**Definition 2.15** Sei  $A$  ein linearer Operator. Dann heißt  $A^*$  der zu  $A$  adjungierte Operator, falls gilt:

$$\underbrace{\langle Ax, y \rangle}_{\text{Skalarprodukt in } \mathcal{X}} = \underbrace{\langle x, A^*y \rangle}_{\text{Skalarprodukt in } \mathcal{Y}} \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}$$

Es gelten folgende Regeln:

1.  $(A + B)^* = A^* + B^*$
2.  $(\alpha A)^* = \alpha^* A^*$ . Falls  $\alpha$  ein Skalar ist, so ist  $\alpha^*$  die konjugiert Komplexe
3.  $(AB)^* = B^* A^*$
4.  $A^{**} = (A^*)^* = A$
5.  $A^{-1*} = A^{*-1}$ . Falls  $A$  bijektiv ist, so ist es auch  $A^*$ .

Bei einer Matrix erhält man den adjungierten Operator, indem man die Elemente konjugiert und die Matrix transponiert:

$$A^* = \overline{A}^T$$

Eine Matrix  $A$  nennt man *selbstadjungiert*, oder *hermitesch* (im Reellen *symmetrisch*), falls gilt:

$$A^* = A$$

Damit läßt sich leicht zeigen, daß  $A^*A$  hermitesch ist:

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A.$$

Für endlichdimensionale Vektorräume  $\mathbb{C}^n$  mit der linearen Transformation  $A$  gilt:

1.  $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$
2.  $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$

3.  $\dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{N}(A^*) = n$
4.  $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(A^*)$   
 $\dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathcal{N}(A^*)$   
 ( $A$  und  $A^*$  haben den selben Rang und den selben Rangabfall)
5.  $A$  ist eine eindeutige Abbildung von  $\mathcal{R}(A^*)$  auf  $\mathcal{R}(A)$

**Satz 2.6** *Der Vektorraum  $\mathbb{C}^n$  kann wie folgt zerlegt werden:*

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^n &= \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp \\ &= \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{R}(A^*)^\perp\end{aligned}$$

**Beweis:**

Sei  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(A)^\perp$  gegeben. Wegen  $A(A^*\mathbf{y}) \in \mathcal{R}(A)$  und  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(A)^\perp$  gilt:

$$0 = \langle \mathbf{y}, AA^*\mathbf{y} \rangle = \langle A^*\mathbf{y}, A^*\mathbf{y} \rangle = \|A^*\mathbf{y}\|^2$$

(Wegen  $\langle \mathbf{y}, A\mathbf{z} \rangle = \langle A^*\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$  mit  $\mathbf{z} = A^*\mathbf{y}$ )

$$\Rightarrow A^*\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y} \in \mathcal{N}(A^*)$$

d.h.: Aus  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(A)^\perp$  folgt  $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(A^*)$ . Angenommen:  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(A^*)$ , dann gilt für alle  $\mathbf{x}$ :

$$0 = \underbrace{\langle A^*\mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle}_{=0} = \langle \mathbf{z}, A\mathbf{x} \rangle$$

d.h.:

$$\mathbf{z} \perp \mathcal{R}(A)$$

daraus folgt aber:

$$\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$$

(Beweis für 2.) und 1. folgt aus der Tatsache

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp.$$

□

**Definition 2.16** *Ein linearer Operator  $A$  heißt unitär (im Reellen orthogonal), falls*

$$AA^* = A^*A = I$$

$\Rightarrow A^{-1} = A^*$  wegen  $A^{-1}A = I$ .

Ein unitärer Operator ist bijektiv. Er läßt das Innenprodukt und die Norm unverändert:

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$  (Normisomorphismus).

**Mögliche Interpretationen für  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$**  Sei  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{bmatrix}$ .

Dann gibt es zwei mögliche Interpretationen für  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ :

1.  $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i a_i$  (Linearkombination der Spaltenvektoren)

2.  $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \langle b_1^T, \mathbf{x} \rangle \\ \langle b_2^T, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle b_m^T, \mathbf{x} \rangle \end{bmatrix}$

### 2.7.5 Norm einer linearen Transformation

Definiert man die Norm einer linearen Abbildung gemäß

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|,$$

so gilt die Ungleichung

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

In Worten:  $\|A\|$  ist die maximale Länge in  $\mathcal{Y}$ , wenn  $\mathbf{x}$  alle Werte auf der Einheitskugel durchläuft.

Man erhält somit:

1.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (Dreiecksungleichung)
2.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  (Submultiplikativität)

**Beispiele** Die Vektornormen der folgenden Räume induzieren jeweils die entsprechenden Operatornormen:

$$l_1(n) \hat{=} \|A\|_1 = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \text{ (Spaltensummennorm)}$$

$$l_2(n) \hat{=} \|A\|_2 = |\lambda_{\max}(A^*A)|^{\frac{1}{2}} \text{ (Spektralnrm)}$$

$$l_\infty \hat{=} \|A\|_\infty = \max_i \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \text{ (Zeilensummennorm)}$$

Nimmt man  $\|A\| = \left( \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , so hat man eine mit der Ungleichung

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

verträgliche, jedoch nicht die kleinste aller Normen gewählt.

Es gilt:  $A^*A$  ist positiv semidefinit.  $\Rightarrow$  Eigenwerte von  $A^*A$  sind reell und  $\geq 0$ .

**Beispiele**

1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ .  $\lambda_1(A^*A) = 19.57$ ;  $\lambda_2(A^*A) = 5.22$ ;  $\lambda_3(A^*A) =$

64.21.

$$\|A\| = (\lambda_{\max}(A^*A))^{\frac{1}{2}} = 8.913$$

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 9.434 \\ & = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{\frac{1}{2}} = (\text{spur}(A^*A))^{\frac{1}{2}} \\ 2. \quad A &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \lambda_1(A^*A) = 0; \lambda_2(A^*A) = 1.732; \lambda_3(A^*A) = 0. \end{aligned}$$

$$\|A\| = (\lambda_{\max}(A^*A))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|a_1^T\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \langle a_1^T, \mathbf{x} \rangle \\ \langle a_2^T, \mathbf{x} \rangle \\ \langle a_3^T, \mathbf{x} \rangle \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \|a_1\| \\ \|a_2\| \\ \|a_3\| \end{pmatrix}$$

(wegen  $\|\mathbf{x}\| = 1$ ).

Falls  $a_1, a_2, a_3$  und  $\mathbf{x}$  kollinear sind, gilt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}\|^2 &\leq \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \|a_3\|^2 \\ &= |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{13}|^2 + \dots + |a_{33}|^2 \\ &\Rightarrow \|\mathbf{y}\| \leq \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

## 2.8 Hilbert-Räume

**Definition 2.17** Ein Hilbert-Raum ist ein vollständiger unitärer Raum (Innenproduktraum).

*Vollständigkeit* bedeutet die Konvergenz aller Cauchy-Folgen im Sinne der durch die Norm induzierten Metrik gegen ein Element des Raumes. (D.h. für alle  $n, m \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) \leq \epsilon$ ) Jeder endlichdimensionale Raum ist vollständig.

$\mathbb{R}^n (E^n)$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i$
$\mathbb{C}^n$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i^*$
<b>Beispiele</b>	$l_2(\infty)$ $\ \mathbf{x}\ ^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty}  x_i ^2 \leq \infty$ (Hilbertscher Folgenraum)
	$L_2[a, b]$ $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t) y^*(t) dt$
	l.i.m. (...) = $\lim_{n \rightarrow \infty} \ \mathbf{x}_n\ _{L_2}$

**Anmerkung:** Eine Cauchy-Folge in einem Raum  $\mathcal{X} = (0, 1)$ , ( $\hat{=}$  offenes Intervall zwischen 0 und 1) braucht keinen Grenzwert in  $\mathcal{X}$  zu haben.  $\mathcal{X}$  ist mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  ein metrischer Raum. Die Folge  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$  ist Cauchy-Folge in  $\mathcal{X}$ , besitzt dort aber keinen Grenzwert (Grenzwert ist 0 und gehört nicht zu  $\mathcal{X}$ ). Dagegen ist  $[0, 1]$  vollständig.  $\mathbb{Q}$  ist unvollständig, denn es gibt Cauchy-Folgen in  $\mathbb{Q}$ , die z.B. gegen  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  konvergieren.

### weitere Beispiele

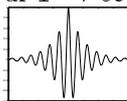
$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_0^T x(t)x^*(t)dt \quad (x \in L_2[0, T])$$

als Energie und

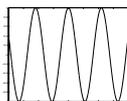
$$\frac{1}{T}\|x\|^2 = \frac{1}{T}\langle x, x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x^*(t)dt$$

als mittlere Leistung.

Für  $T \rightarrow \infty$



$$0 < \|x\|^2 < \infty \text{ Energiesignale}$$



$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T}\|x\|^2 < \infty \text{ Leistungssignale}$$

Im unbegrenzten Zeitintervall haben Energiesignale endliche Energie und verschwindende mittlere Leistung und Leistungssignale endliche mittlere Leistung und unbegrenzte Energie.

## 2.9 Bestapproximation

Es wird folgendes behandelt: Bestapproximation, Verallgemeinerte Fourierreihe, Projektionssatz im Hilbertraum

**Satz 2.7 (Projektionssatz)**  $U$  sei ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes  $\mathcal{X}$ . Dann kann  $\mathcal{X}$  eindeutig wie folgt zerlegt werden:

$$\mathcal{X} = U \oplus U^\perp$$

bzw.  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  mit  $\mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in U^\perp$

Die orthogonale Projektion  $P : \mathcal{X} \rightarrow U$  entlang  $U^\perp$  erfüllt:

$$\|\mathbf{x} - P\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{y} \in U$$

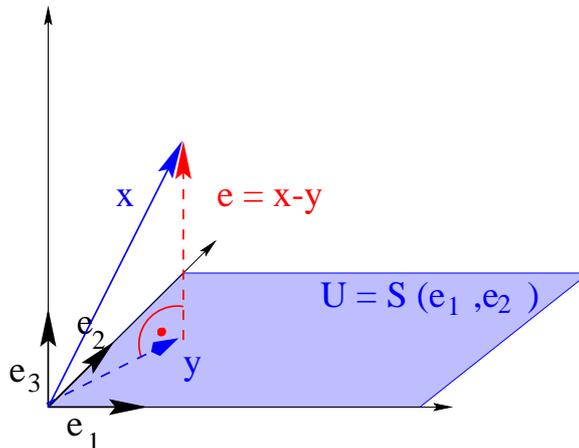
D.h. von allen Punkten in  $U$  liegt  $P\mathbf{x}$  dem Punkt  $\mathbf{x}$  am nächsten (Bestapproximation von  $x$  in  $U$ , Minimaleigenschaft der Orthogonalprojektion). Oder: der Fehlervektor  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - P\mathbf{x}$  steht senkrecht auf dem Unterraum  $U$ !

$$\Rightarrow \langle \mathbf{x} - P\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle P\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

**Beispiel  $E^3$** 

$$U = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \Rightarrow U^\perp = \text{Span}(\mathbf{e}_3) \quad \mathcal{X} = U \oplus U^\perp$$

Es gilt:  $\mathbf{e} \perp \mathbf{y}$  und damit auch  $\mathbf{e} \perp \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$



Somit Bestapproximation von  $\mathcal{X}$  in  $U$  durch  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_i \rangle = 0$  für  $i = 1, 2$  ( $\mathbf{e} \hat{=} \text{Fehlervektor}$ )

**Orthogonale Projektion auf  $U$ , gegeben durch orthonormale Basis  $\{\mathbf{e}_i\}$** 

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \sum \alpha_i \mathbf{e}_i \\ &= \sum \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \quad \text{Projektion auf Basisvektoren} \end{aligned}$$

Dies nennt man die verallgemeinerte Fourierreihe und die  $\alpha_i$  die Entwicklungs- oder Fourierkoeffizienten bzgl. des Orthonormalsystems  $\{\mathbf{e}_i\}$

**Herleitung ohne Projektionssatz**

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \sum \alpha_i \mathbf{e}_i \\ E &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{e}\|^2 = \min_{\alpha_i} \begin{cases} l_2 & \text{min. Fehlerquadrat} \\ L_2 & \text{min. Fehlerintegral} \end{cases} \\ &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0 \quad \rightarrow \text{lösen} \end{aligned}$$

**Nichtorthonormale Basis in  $U$** 

(Normalgleichungen, Gramsche Matrix)

$\mathbf{x} - \mathbf{y} \perp \mathbf{y}$  und somit auch  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \perp \mathbf{e}_i$  (mit  $\mathbf{y} = \sum \alpha_i \mathbf{e}_i$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{e}_i \rangle &= 0 \quad \forall \mathbf{e}_i \in U \\ \Rightarrow \langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \quad i = 1, 2, \dots, \dim U = m \end{aligned}$$

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \alpha_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \alpha_2 + \dots + \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_1 \rangle \alpha_m &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \alpha_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \alpha_2 + \dots + \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_2 \rangle \alpha_m &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle \\ &\vdots \\ \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_m \rangle \alpha_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_m \rangle \alpha_2 + \dots + \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_m \rangle \alpha_m &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_m \rangle \end{aligned}$$

heißen *Normalgleichungen* (Gauß)

$$\Rightarrow G \cdot \alpha = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_m \rangle \end{pmatrix}$$

mit

$$G_{ij} := \{\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle\} \quad \begin{array}{l} \text{(Gramsche Matrix)} \\ \text{hermitesch, da } \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle \end{array}$$

$\alpha_i$  Fourierkoeffizienten (FK)

Lineares Gleichungssystem lösbar, da  $\{\mathbf{e}_i\}$  Basis von  $U$  und damit linear unabhängig.

Besonders einfach, falls Orthonormalbasis:

$$\begin{aligned} \Rightarrow G &= I && \text{(Einheitsmatrix)} \\ \Rightarrow \alpha_i &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle && \text{(Fourierkoeffizient (FK))} \end{aligned}$$

**Beispiel** Es seien folgende Vektoren gegeben:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Außerdem sei  $U = S[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  der von  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  aufgespannte Vektorraum. Dann lauten die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \alpha_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \alpha_2 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \alpha_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \alpha_2 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle \\ \Rightarrow G &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} && G \cdot \alpha = d = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ \alpha &= G^{-1}d = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{y} &= \underbrace{0}_{\alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1 + \underbrace{\sqrt{2}}_{\alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Falls  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  eine Orthonormalbasis von  $U$  bilden, also zum Beispiel bei:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = 1 \\ \alpha_2 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle = 1 \end{aligned}$$

und damit:

$$\mathbf{y} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Anmerkung** Es gilt außerdem:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \perp \mathbf{y} &\Rightarrow \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E &= \|\mathbf{e}\|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0 \quad \text{da Norm} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad (\text{Besselsche Ungleichung})$$

Vollständigkeitsrelation oder Parsevalsche Gleichung bei Gleichheit:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ \|\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 \end{aligned}$$

gilt, falls  $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathcal{X}$  eine Basis ist (vollständig oder maximal), da man durch Hinzunahme weiterer Vektoren es nicht zu einem größeren ONS erweitern kann. Für eine mathematisch exakte Formulierung sei der Leser auf [Heuser(1992)] Seite 176 verwiesen.

Die Wahl der Basis ist entscheidend für das Konvergenzverhalten der Fourierreihe.

## 2.10 Die Pseudoinverse Matrix

Die Pseudoinverse Matrix stellt eine Verallgemeinerung der inversen Matrix dar. Angenommen,  $A$  sei eine reguläre Matrix mit  $\dim A = n \times n$ , dann gibt es für alle  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  ein und nur ein  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ , sodaß  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Darüberhinaus ist die Beziehung zwischen  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{x}$  linear und die Inverse ist definiert als  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ . Im allgemeinen ist jedoch die Zahl der Unbekannten  $x_i$  verschieden von der Zahl der Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

unterbestimmtes Gleichungssystem (mehr Unbekannte  $x_i$  als Gleichungen)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dagegen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + 0 \cdot x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0 \cdot x_3 &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + 0 \cdot x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

überbestimmtes Gleichungssystem (mehr Gleichungen als Unbekannte)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Hinzufügen von trivialen Spalten und Zeilen (Nullspalten bzw. Nullzeilen) erhält man eine vorteilhaftere Darstellung, jedoch wird  $A$  singulär, d.h. der Nullraum von  $A$  ( $\mathcal{N}(A)$ ) enthält von Null verschiedene Elemente, und der Rang von  $A$  ist kleiner als  $n$ . Somit hat  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$  keine oder unendlich viele Lösungen.

Durch eine Neuformulierung kann man erreichen, daß man immer eine eindeutige Lösung bekommt: "Finde einen Lösungsvektor  $\mathbf{x}_0$  von kleinster Norm, welcher die Norm des Fehlervektors (oder *Residuenvektors*) minimiert (allgemeine quadratische Form)." Die Lösung ist dann die beste Näherungslösung.

Damit gilt:

- $\|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\| < \|A\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$  **oder**
- $\|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\| = \|A\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  und  $\|\mathbf{x}_0\| < \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$

D.h.: Wenn es eine andere Lösung  $\mathbf{x}$  gibt, so ist sie von größerer Norm. Diese Lösung kann mit Hilfe der Pseudoinversen  $A^+$  gefunden werden:

$$\mathbf{x}_0 = A^+ \mathbf{y}$$

### 2.10.1 Zur Charakterisierung der Lösung

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Raum  $\mathbb{C}^n$  mithilfe eines Endomorphismus  $A$  in zwei Unterräume zerlegen zu können. Dazu benötigen wir zunächst folgenden

**Satz 2.8** Sei  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  linear. Dann ist  $\mathcal{R}(A)$  abgeschlossen.

**Beweis:**

Es gilt:  $\mathcal{R}(A)$  ist ein Untervektorraum von  $\mathbb{C}^n$ , denn

- zu  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{R}(A)$  existieren  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{C}^n$  mit  $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$  und  $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$ . Also gilt:

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in \mathcal{R}(A)$$

- zu  $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(A)$  existiert ein  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  mit  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Also gilt:

$$\alpha \mathbf{y} = \alpha A\mathbf{x} = A\alpha \mathbf{x} \in \mathcal{R}(A)$$

Wegen  $\mathcal{R}(A) \subset \mathbb{C}^n$  gilt  $\dim \mathcal{R}(A) \leq n$ . Also ist  $\mathcal{R}(A)$  ein endlichdimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{C}^n$  und damit vollständig (siehe [Heuser(1992)], S.103, Satz 11.4). Daraus folgt, dass  $\mathcal{R}(A)$  abgeschlossen ist, denn sonst gäbe es eine konvergente Folge  $\mathbf{x}_n$  in  $\mathcal{R}(A)$ , deren Grenzwert nicht in  $\mathcal{R}(A)$  liegt, die aber (aufgrund ihrer Konvergenz) eine Cauchy-Folge ist. Dies wäre ein Widerspruch zur Vollständigkeit von  $\mathcal{R}(A)$ .  $\square$

Nach Satz (2.6) kann  $\mathbb{C}^n$  folgendermaßen zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp \\ &= \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*) \\ &= \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{R}(A^*)^\perp \\ &= \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$$

mit  $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{R}(A)$  und  $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ . Die Bestapproximation von  $\mathbf{y}$  in  $\mathcal{R}(A)$  erhält man wegen des Projektionssatzes durch orthogonale Projektion von  $\mathbf{y}$  auf  $\mathcal{R}(A)$ :

$$\| \underbrace{A\mathbf{x} - \mathbf{y}_1}_{\in \mathcal{R}(A)} - \mathbf{y}_2 \|^2 = \|A\mathbf{x} - \mathbf{y}_1\|^2 + \|\mathbf{y}_2\|^2 = \|\mathbf{y}_2\|^2$$

(Wegen  $A\mathbf{x} \in \mathcal{R}(A)$  und  $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{R}(A)$  hat  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}_1$  eine Lösung, also kann der erste Term zu Null gemacht werden.) Die Lösung mit minimaler Norm lautet:

$$\mathbf{x}_0 = A^+ \mathbf{y}$$

$\mathcal{R}(A)$  mit  $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$  ist der von den Spaltenvektoren aufgespannte Raum:

$$\mathcal{R}(A) = S[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$$

Der Fehlervektor  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - A\mathbf{x} = \mathbf{y}_2$  steht senkrecht auf  $\mathcal{R}(A)$  und ist somit auch zu allen Spaltenvektoren von  $A$  orthogonal, d.h. es gilt:

$$A^* \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^* \mathbf{e} \\ \mathbf{a}_2^* \mathbf{e} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^* \mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_n \rangle \end{pmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow \mathbf{e} \perp \mathcal{R}(A)$  oder auch  $\mathbf{e} \in \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$ .

Die Pseudoinverse kann durch folgende Axiome definiert werden:

1.  $AA^+A = A$
2.  $A^+AA^+ = A^+$
3.  $(A^+A)^* = A^+A$
4.  $(AA^+)^* = AA^+$

weiterhin gelten folgende Regeln:

1.  $(A^*)^+ = (A^+)^*$
2. Falls  $A$  regulär:  $A^+ = A^{-1}$
3.  $AA^+$  ist die orthogonale Projektion von  $\mathbb{C}^n$  auf  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*)^\perp$

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}_o - \mathbf{y}\| &= \| \underbrace{AA^+ \mathbf{y}}_{\text{orthog. Projektion auf } \mathcal{R}(A)} - \mathbf{y} \| \\ &= \|\mathbf{y}_1\| \end{aligned}$$

4.  $A^+A$  ist die orthogonale Projektion von  $\mathbb{C}^n$  auf  $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$
5.  $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$
6.  $\mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$
7.  $A^{++} = A$

8. im allgemeinen:  $(AB)^+ \neq B^+A^+$

9.  $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$

10.  $A^*AA^+ = A^*$  wegen  $\mathbf{e} \in \mathcal{N}(A^*)$

$$A^*\mathbf{e} = \mathbf{0} \Rightarrow A^*\mathbf{e} = A^*(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) = A^*(AA^+\mathbf{y} - \mathbf{y}) = A^*AA^+\mathbf{y} - A^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

oder wegen:

$$(AB)^* = B^*A^*, \quad (ABC)^* = C^*B^*A^* \\ A^*AA^+ = A^*(AA^+)^* = ((AA^+)A)^* = A^*$$

11. Aus 3. und 4. folgt:

$$AA^+ : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{R}(A)$$

also:

$$I - AA^+ : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$$

und:

$$A^+A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{R}(A^*)$$

also:

$$I - A^+A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$$

weiterhin:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y} - AA^+\mathbf{y} = (I - AA^+)\mathbf{y} \in \mathcal{N}(A^+)$$

Nun gilt für die Größe des Fehler- oder Residuenvektors (Approximationsfehler):

$$\|\mathbf{e}\| = \|(I - AA^+)\mathbf{y}\| \leq \|(I - AA^+)\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

Der mögliche Fehler vergrößert sich mit dem Defekt von  $A$  bzw. mit der Dimension des Nullraumes von  $A^*$  (wobei  $\dim \mathcal{N}(A^*) = \dim \mathcal{N}(A)$ ). Es gilt:

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(A^*) \Rightarrow \mathbf{x}_0 \perp \mathcal{N}(A), e \in \mathcal{N}(A^*)$$

12.  $\mathbf{x}_0$  minimiert den Residuenvektor. Es gibt unendlich viele Werte für  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \underbrace{\mathbf{x}_1}_{\in \mathcal{N}(A)}$  ( $\Rightarrow A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ ), welche den gleichen Wert liefern, da  $\|\mathbf{e}\| =$

$\|A\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) - \mathbf{y}\| = \|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\|$ , welche aber von der Norm her größer sind:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1\|^2 = \|\mathbf{x}_0\|^2 + \|\mathbf{x}_1\|^2 > \|\mathbf{x}_0\|^2$$

für  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ .

Somit gilt:

$$\mathbf{x} = A^+\mathbf{y} + \underbrace{(I - A^+A)z}_{=\mathbf{x}_1}$$

für beliebige  $z \in \mathbb{C}^n$ . Daraus folgen die Abbildungseigenschaften von  $A$  und  $A^+$ :

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$$

### 2.10.2 Charakterisierung der besten Näherungslösung

Es gilt:

$$\|A(\underbrace{\mathbf{x}_0}_{\in \mathcal{R}(A^*)} + \underbrace{\mathbf{x}_1}_{\in \mathcal{N}(A)}) - \underbrace{\mathbf{y}_0}_{\in \mathcal{R}(A)} - \underbrace{\mathbf{y}_1}_{\in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)}\|$$

Zur Berechnung der Pseudoinversen:

1.  $A$  regulär:  $A^+ = A^{-1}$
2. Voller Zeilenrang (zeilenregulär), z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Zeilen linear unabhängig.  $\Rightarrow A^+ = A^L := A^*(AA^*)^{-1}$  (*Linksinverse*)

3. Voller Spaltenrang (spaltenregulär), z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^+ = A^R := (A^*A)^{-1}A^*$  (*Rechtsinverse*)

4.  $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  mit  $A'$  regulär:

$$A^+ = \begin{pmatrix} (A')^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Berechnung über Grenzwert:

$$A^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (A^T A + \epsilon^2 I)^{-1} A^T$$

6. Berechnung über Gram-Schmidt
7. Interessant auch die Beziehung zur SVD (singular value decomposition, Singulärwertberechnung):  
Transformation auf Diagonalfom mit den Eigenwerten auf der Diagonale;  
Inversion der von Null verschiedenen EW (Kehrwert); die EW, welche Null sind (oder sehr klein, unter einem Schwellwert) bleiben Null.

Mit der Pseudoinversen können somit elegant

1. reguläre Gleichungssysteme
2. unterbestimmte Gleichungssysteme (bedingte Ausgleichsrechnung)
3. überbestimmte Gleichungssysteme (vermittelnde Ausgleichsrechnung, minimales Fehlerquadrat)

gelöst werden, wobei 3) duales Problem von 2) ist.

**Beispiel**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} -0.23 & .018 & 0 \\ 0.31 & -0.13 & 0 \\ 0.08 & 0.05 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = A^+ \mathbf{y} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**allgemeine Lösung dazu**

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + Q \cdot \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$$

$$Q = (I - A^+A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + c\mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{x}_0 \perp \mathbf{x}_2 \Rightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_0\|^2 + c^2 \|\mathbf{x}_2\|^2 \quad \text{minimal für } c = 0$$

$$\mathcal{N}(A) = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 \perp \mathcal{N}(A) \Rightarrow \mathbf{Ax}_2 = 0$$

# Kapitel 3

## Bildtransformationen

Eine Bildtransformation ist eine Repräsentation eines Bildes in einem anderen Basissystem, welches für die Darstellung geeigneter sein kann, als der Originalraum. Anwendung finden die Transformationen bei der Kompression von Bilddaten (oder auch Bildkodierung), sowie bei der Bildfilterung im Spektralbereich.

### 3.1 Grundlagen

Das Innenprodukt zweier abgetasteter Bilder der Dimension  $M \times N = 2^m \times 2^n$  ist definiert als (siehe auch Abschnitt 2.2):

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} \cdot \bar{b}_{ij} = \text{Spur}(A \cdot B^*)$$

Von diesem Innenprodukt kann wie folgt eine Norm abgeleitet werden (siehe auch Abschnitt 2.3):

$$\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} \bar{a}_{ij} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} |a_{ij}|^2$$

**Achtung:**

Diese Norm hat nichts mit der Norm einer Matrix als linearer Operator zu tun;  $A$  ist hier ein Vektorelement

Falls  $A$  und  $B$  quadratische Bilder sind ( $M = N$ ), dann kann das Innenprodukt von  $A$  und  $B$  auch wie folgt beschrieben werden:

$$\langle A, B \rangle = u^T (A\bar{B})u \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die *zyklische Translation* eines digitalen Bildes  $A$  der Dimension  $M \times N$  bei gegebenem Translationsvektor (Verschiebevektor)  $\mathbf{t} = (p, r)^T$  permutiert die

Zeilen und Spalten von  $A$  nach folgender Vorschrift (die Zeilen werden um  $p$  nach oben und die Spalten um  $r$  nach links verschoben):

$$A(k-p, l-r) = A((k-p) \bmod M, (l-r) \bmod N), \quad (3.1)$$

wobei  $k$  alle Werte von 0 bis  $M-1$  und  $l$  alle Werte von 0 bis  $N-1$  durchläuft. Man kann sich das Bild  $A$  auch als periodisch fortgesetzt vorstellen, sodass dann die zyklische Translation einer gewöhnlichen entspricht. Aus Gleichung (3.1) folgt  $A(k-M, l-N) = A(k, l)$ , das heißt, die zyklische Translation ist periodisch. Da die zyklische Translation eine lineare Abbildung ist, kann sie auch als Matrixprodukt geschrieben werden. Die Translation um den Vektor  $\mathbf{t} = (p, r)^T$  wird dabei als Produkt von Elementarmatrizen beschrieben, welche jeweils das Bild um eine Zeile bzw. Spalte verschieben. Dabei erfolgt die Spaltenverschiebung durch das Multiplizieren von rechts mit der quadratischen *Translationsmatrix*  $P_N$  der Dimension  $N \times N$ , die folgende Gestalt hat:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenverschiebung erfolgt durch Multiplikation von links mit der Transponierten von  $P_M$ , welche die Dimension  $M \times M$  hat. Die allgemeine Abbildungsvorschrift der zyklischen Translation mit Translationsvektor  $\mathbf{t} = (p, r)^T$  lautet dann in Matrixschreibweise:

$$A' = (P_M^T)^p A P_N^r$$

**Beispiel** Für  $M=N=4$  hat die Translationsmatrix die Gestalt:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } P^0 = I \quad P^4 = P^0 = I$$

Bei einem Translationsvektor  $\mathbf{t} = (2, 3)^T$  wird ein Bild  $A$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

wie folgt verschoben:

$$(P^T)^2 A P^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

## 3.2 Die Fouriertransformation

### 3.2.1 Motivation

Ein kontinuierliches Signal (Bild) kann als komplexwertige ein- bzw. zweidimensionale Funktion betrachtet werden. Untersucht man lediglich die Signale, die quadratisch Lebesgue-integrierbar sind und auf dem Intervall  $(-\infty, \infty)$  definiert sind, so erhält man den Vektorraum  $L_2(-\infty, \infty)$  (siehe hierzu [Heuser(1992)]). Dieser Vektorraum kann mit einem Skalarprodukt (also auch mit einer Norm) versehen werden, sodass er vollständig und damit ein Hilbertraum wird. Eine Basis dieses Hilbertraumes bilden die Funktionen  $\mathcal{B} = \{e^{j\omega t} | \omega \in \mathbb{R}\}$ . Schränkt man den Definitionsbereich der Signale auf ein abgeschlossenes Intervall der Länge  $T$  ein, so erhält man (z.B.) den Vektorraum  $L_2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , welcher wiederum mit einem Skalarprodukt zu einem Hilbertraum gemacht werden kann. Die entsprechenden *Basisfunktionen* lauten dann  $\{\frac{1}{\sqrt{T}}e^{j2\pi f \frac{t}{T}} | f \in \mathbb{R}\}$ . Sie sind paarweise orthogonal und normiert, bilden also eine Orthonormalbasis (ONB). Des Weiteren kann gezeigt werden, dass jedes lineare zeitinvariante System (siehe hierzu Abschnitt 5.2) eine Basisfunktion  $\varphi_\omega = e^{j\omega t}$  aus  $\mathcal{B}$  auf ein Vielfaches von  $\varphi_\omega$  abbildet (Beweis: siehe [Papoulis(1977)]), weshalb man sie auch *Eigenfunktionen* linearer zeitinvarianter Systeme nennt (in Anlehnung an den Begriff "Eigenvektor", siehe hierzu [Heuser und Wolf(1986)]). Die entsprechenden *Eigenwerte* sind nur abhängig vom Funktionsparameter  $\omega$  und werden als  $H(\omega)$  notiert. Zusammengefasst ergibt sich also für ein lineares zeitinvariantes System  $A$  die Gleichung:

$$A\varphi_\omega = H(\omega)\varphi_\omega$$

Das bedeutet, dass jedes lineare zeitinvariante System durch seine Eigenwerte  $H(\omega)$  eindeutig charakterisiert wird.

Die Darstellung eines beliebigen Signals  $x \in L_2(-\infty, \infty)$  in der ONB  $\mathcal{B}$  (Basistransformation) erfolgt nun durch Bestimmung der *Fourierkoeffizienten*  $\langle x, \varphi_\omega \rangle$  für jedes  $\omega \in \mathbb{R}$ . Diese Abbildung heißt *Fouriertransformation*. Da die  $\omega$  auch als *Frequenzen* bezeichnet werden, spricht man auch von einer *Transformation in den Frequenzbereich*. Mathematisch entspricht der Frequenzbereich jedoch dem Raum  $L_2(-\infty, \infty)$ , sodass die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  einen Endomorphismus<sup>1</sup> darstellt:

$$\mathcal{F} : L_2(-\infty, +\infty) \rightarrow L_2(-\infty, +\infty)$$

### 3.2.2 Drei Definitionen der Fouriertransformation

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} & : L_2(-\infty, +\infty) \rightarrow L_2(-\infty, +\infty) \quad (\text{Hintransformation}) \\ \tilde{x}(f) & = c_1 \cdot \langle x(t), e^{j2\pi f t} \rangle = c_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1} : L_2(-\infty, +\infty) \rightarrow L_2(-\infty, +\infty) \quad (\text{Rücktransformation})$$

---

<sup>1</sup>Hierbei folgt die Linearität von  $\mathcal{F}$  aus der Linearität des Skalarprodukts

$$x(t) = c_2 \cdot \langle \tilde{x}(f), e^{-j2\pi ft} \rangle = c_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$c_1 = c_2 = 1, \text{ unitäre Basis } \langle x(t), y(t) \rangle = \langle \tilde{x}(f), \tilde{y}(f) \rangle$$

2. in der Literatur

$$\tilde{x}(\omega) = \langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \tilde{x}(\omega), e^{-j\omega t} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Diese Definition ist nicht unitär, da

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \tilde{x}(\omega), \tilde{y}(\omega) \rangle$$

3. (auch Literatur)

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \tilde{x}(\omega), e^{-j\omega t} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Diese Definition ist unitär, da

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle \tilde{x}(\omega), \tilde{y}(\omega) \rangle$$

Soviel zu den in der Literatur vorkommenden abweichenden Definitionen.

$\mathcal{F}$  ist unitär ( $\langle x(t), y(t) \rangle = \langle \tilde{x}(f), \tilde{y}(f) \rangle$ )

Für  $x = y$ :

$$\begin{aligned} \langle x(t), x(t) \rangle &= \|x(t)\|^2 \\ &= \langle \tilde{x}(f), \tilde{x}(f) \rangle \\ &= \|\tilde{x}(f)\|^2 \quad (\text{Parseval, siehe 2.9}) \end{aligned}$$

ausgeschrieben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) \tilde{y}(f)^* df$$

$x = y$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(f)|^2 df$$

**Die wichtigsten Eigenschaften der Fouriertransformation**

1. Linearität  
 $(a_1x + a_2y) \circ \bullet a_1\tilde{x} + a_2\tilde{y}$
2. Symmetrie  
 $\tilde{x}(f = t) \circ \bullet x(t = -f) \quad (\tilde{\tilde{x}}(t) = x(-t))$   
 (zyklisch vom Grad 4)
3. Skalierung  
 $x(kt) \circ \bullet \frac{1}{|k|}\tilde{x}(f/k); \quad k \in \mathbb{R}$
4. Verschiebung  
 $x(t - t_0) \circ \bullet \tilde{x}(f)e^{-j2\pi ft_0}; \quad t_0 \in \mathbb{R}$
5. Ableitungen  
 $x^{(n)}(t) \circ \bullet (j2\pi f)^n \tilde{x}(f)$

modifizierte Darstellung der Rücktransformation

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{x}(f)) = (\mathcal{F}(\tilde{x}^*(f)))^*$$

$\mathcal{F}$  ist zyklisch vom Grad 4.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2(x(t)) &= x(-t) \\ \Rightarrow \mathcal{F}^4(x(t)) &= x(t) \quad (\mathcal{F}^4 = I) \\ \Rightarrow \mathcal{F}^3 &= \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^* \end{aligned}$$

**Symmetrieeigenschaften von  $\mathcal{F}$** 

(even)  $x_e(t) = x_e^*(-t)$  konjugiert symmetrisch (reell: geradsymmetrisch)  
 (odd)  $x_o(t) = -x_o^*(-t)$  konjugiert antisymmetrisch (reell: schiefsymmetrisch)

Jede Funktion lässt sich zerlegen in einen konjugiert symmetrischen und konjugiert antisymmetrischen Anteil:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x_e(t) &= 1/2(x(t) + x^*(-t)) \\ x_o(t) &= 1/2(x(t) - x^*(-t)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widetilde{Re(x(t))} &= 1/2(\widetilde{x(t) + x^*(t)}) \\ &= 1/2(\tilde{x}(f) + \tilde{x}^*(-f)) \\ &= \tilde{x}_e(f) \quad \text{d.h. konjugiert symmetrisch} \end{aligned}$$

(Realteil gerade, Imaginärteil ungerade)

$$\widetilde{x_e(t)} = Re(\tilde{x}(f)) \quad (3.2)$$

$$\widetilde{x_o(t)} = Im(\tilde{x}(f)) \quad (3.3)$$

$x(t)$  reell:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(f) &= \tilde{x}^*(-f) \\ \Rightarrow Re(\tilde{x}(f)) &= Re(\tilde{x}(-f)) \quad \text{gerade} \\ Im(\tilde{x}(f)) &= -Im(\tilde{x}(-f)) \quad \text{ungerade} \end{aligned}$$

**Korrespondenz**

$$\begin{aligned}
 x(t) &\circ\bullet \tilde{x}(f) \\
 x^*(t) &\circ\bullet \tilde{x}^*(-f) \\
 x^*(-t) &\circ\bullet \tilde{x}^*(f) \\
 x(-t) &\circ\bullet \tilde{x}(-f)
 \end{aligned}$$

**Zweidimensional (Bilder)**

$$\mathcal{F} : L_2(-\infty, +\infty) \rightarrow L_2(-\infty, +\infty)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(f_1, f_2) &= c_1 \langle x(t_1, t_2), e^{j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} \rangle \\
 &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1, t_2) e^{-j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} dt_1 dt_2 \quad \text{Hintransformation} \\
 x(t_1, t_2) &= c_2 \langle \tilde{x}(f_1, f_2), e^{-j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} \rangle \\
 &= c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f_1, f_2) e^{j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} df_1 df_2
 \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  ist unitär:

$$\langle x(t_1, t_2), y(t_1, t_2) \rangle = \langle \tilde{x}(f_1, f_2), \tilde{y}(f_1, f_2) \rangle$$

unendlich ausgedehnte Signale  $t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$  alle Frequenzen können vorkommen  $f_1, f_2 \in (-\infty, +\infty)$

**Fourierreihe und Beziehung zur Fouriertransformation**

$$L_2[-T_0/2, T_0/2] \rightarrow l_2(\infty)$$

wichtiges Bild!!!

**orthonormale Basis**

(abzählbar)

$$\{e_i(t) = \sqrt{f_0} e^{j2\pi i f_0 t}\} \quad i = 0 \dots +\infty$$

**Spezielle Fourierreihe**

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = \sqrt{f_0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i e^{j2\pi i f_0 t}$$

mit Fourierkoeffizienten:

$$\alpha_i = \langle x, e_i \rangle = \sqrt{f_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi i f_0 t} dt$$

bei reellen Funktionen:  $\alpha_{-i} = \alpha_i^*$

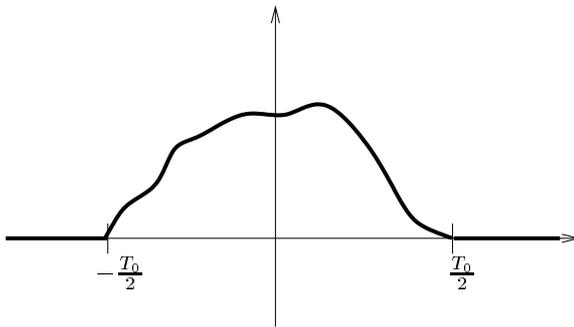


Abbildung 3.1: triviale Ergänzung der Signalfunktion

**Notationen aus der Literatur**

$$x(t) = \sum \alpha'_i e^{j2\pi i f_0 t}, \quad \alpha'_i = \frac{1}{T_0} \langle x, e^{j2\pi i f_0 t} \rangle = \sqrt{f_0} \alpha_i$$

$$\langle x, x \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle = T_0 \langle \alpha', \alpha' \rangle$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = T_0 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\alpha'_i|^2 \text{ (Parseval, siehe 2.9)}$$

Fehler bei endlichem  $N$ : Der Fehler steht senkrecht auf dem Unterraum:

$$E = \|e\|^2 = T_0 \sum_{|i| > N} |\alpha'_i|^2$$

Interpretation von  $x(t) \in L_2[a, b]$  in  $L_2(-\infty, \infty)$ : Voraussetzung, um Fourier-Reihe mit Fourier-Integral zu verbinden.

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Funktion auszudehnen auf  $(-\infty, \infty)$ :

1.  $x_0(t) \equiv 0$  für  $|t| > \frac{T_0}{2}$  (triviale Ergänzung, siehe Abb. 3.1)
2.  $x_p(t + nT_0) = x_p(t)$ ,  $t \in [a, b]$  (periodische Fortsetzung)

Damit ist auch die Translation erklärt ( $x(t+T)$  anstatt  $(t \bmod t_0)$ ). In beiden Fällen gilt: Bei Kenntnis von  $x(t)$  für  $|t| \leq \frac{T_0}{2}$  ist Funktion auch über  $(-\infty, \infty)$  bekannt (triviale Fortsetzung, periodisch oder identisch Null).

Das periodische Fortsetzen stellt die Umkehrfunktion zum Ausblenden dar, falls gilt  $x(t) \equiv 0$  für  $|t| > \frac{T_0}{2}$ , sonst ergibt sich ein aliasing-Fehler. Diese Dualität veranschaulicht Abb. 3.2.

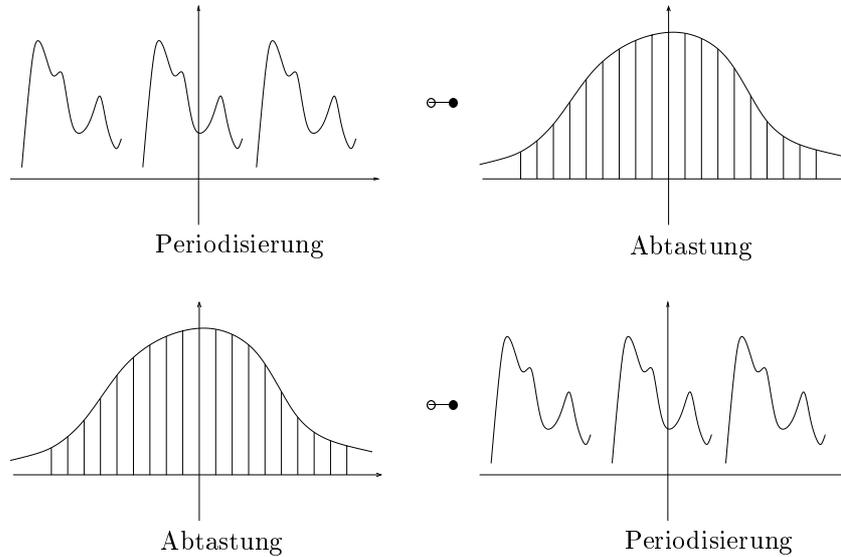


Abbildung 3.2: Dualität zwischen Periodisierung und Abtastung

### 3.2.3 2D-Fourier-Reihe

**Basisfunktionen:**

$$F_{kl}(t_1, t_2) = c \cdot e^{j2\pi(kf_{10}t_1 + lf_{20}t_2)} \quad (3.4)$$

$$X(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle X(t_1, t_2), F_{kl}(t_1, t_2) \rangle}_{\text{Fourierkoeffizienten } \tilde{x}_{kl}} \cdot F_{kl}(t_1, t_2) \quad (3.5)$$

$X(t_1, t_2)$  ist definiert im endlichen Intervall  $\Rightarrow$  diskretes Spektrum, d.h. vollständiges Basisfunktionensystem im Frequenzabstand  $hf_{10} + lf_{20}$ .

Der Zusammenhang der Fourierreihe zur Fouriertransformation besteht durch die Abtastung bzw. Interpolation mit  $\frac{\sin x}{x}$ . D.h. anschaulich: Den Vorgang, um von der Fouriertransformation mit ihren überabzählbar vielen Basisvektoren zu einer Darstellung mit abzählbar vielen zu kommen, nennt man Abtastung. Die Umkehrfunktion dazu ist die Interpolation (mit  $\frac{\sin x}{x}$ ).

### 3.2.4 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Definition als eigenständige orthogonale Transformation im Vektorraum  $\mathbb{C}^N$

$$\{x(n)\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

**Skalarprodukt:**

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i^*$$

**Translation:**

$$x(n-1) = \begin{pmatrix} x(0-1) \bmod N \\ x(1-1) \bmod N \\ \vdots \\ x((n-1)-1) \bmod N \end{pmatrix}$$

Fourierreihe mit einer speziellen orthogonalen Basis im  $\mathbb{C}^N$ . Es gibt  $N$  Nte Einheitswurzeln  $\omega_i = \omega^i$  mit  $\omega = e^{j\frac{2\pi}{N}}$  und  $i = 0 \dots N-1$  (genauer: gemeint sind die  $N$  Potenzen der  $N$ ten Einheitswurzel.)

$$x^N - 1 = (x - \omega_0)(x - \omega_1) \cdots (x - \omega_{N-1}) = 0$$

**orthogonale Basis:** Die Vektoren  $\{\omega_i\}$  für  $i = 0, 1, \dots, N-1$  mit

$$\omega_i = \begin{pmatrix} \omega^{0i} \\ \omega^{1i} \\ \vdots \\ \omega^{(N-1)i} \end{pmatrix}$$

bilden eine orthogonale Basis, denn:

$$\langle \omega_i, \omega_j \rangle = N \cdot \delta_{ij} \text{ (Kronecker-Symbol)}$$

$$\text{es gilt } \|\omega_i\| = \sqrt{N}$$

**Fourierreihe:**

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} \langle \mathbf{x}, \omega_i \rangle \omega_i = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} \tilde{x}_i \omega_i = W^{-1} \tilde{x} \text{ (IDFT)}$$

mit  $W^{-1} = \frac{1}{N} [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}]$  und mit den Fourierkoeffizienten:

$$\tilde{x}_i = \langle \mathbf{x}, \omega_i \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_{ij}^* = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega^{-ij}$$

oder

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \langle x, \omega_0 \rangle \\ \langle x, \omega_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, \omega_{N-1} \rangle \end{pmatrix} = W \cdot x \quad \text{(DFT)}$$

mit

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \cdots & \omega^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} = [\omega_0^*, \omega_1^*, \dots, \omega_{N-1}^*]$$

es gilt:

$$\omega_{ij}^* = \omega^{-ij} = \omega^{-(ij) \bmod N}$$

Beispiel ( $N = 4$ ):  $\omega = e^{j \frac{2\pi}{4}} = e^{j \frac{\pi}{2}} = j$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} \\ 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} \\ 1 & \omega^{-2} & 1 & \omega^{-2} \\ 1 & \omega^{-3} & \omega^{-2} & \omega^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}$$

**Anmerkung:** Die Basis ist nicht normiert, seien  $\mathbf{b}_i$  die Basisvektoren und  $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{b}_i}{\|\mathbf{b}_i\|}$ :

$$\tilde{x}_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_k \rangle = \langle \mathbf{x}, \|\mathbf{b}_k\| \mathbf{e}_k \rangle = \|\mathbf{b}_k\| \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}_{=\tilde{x}_{k0}\text{-Koeff. bei normierter Basis}}$$

$$\tilde{x} = \sqrt{N} \tilde{x}_0$$

Bei der Fourierreihe mit orthogonalen Basen gilt  $\|\mathbf{b}_i\| = \sqrt{N}$ . Deswegen kann man diese wie folgt darstellen:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{N-1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i = \sum_{i=0}^{N-1} \langle \mathbf{x}, \frac{1}{\|\mathbf{b}_i\|} \mathbf{b}_i \rangle \frac{\mathbf{b}_i}{\|\mathbf{b}_i\|} = \frac{1}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_i \rangle \mathbf{b}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_i \mathbf{b}_i$$

normierte Basen:

$$\omega_{0i} = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega_i \Rightarrow W_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} W$$

Die normierte Transformation ist unitär wegen  $\langle W_0 \mathbf{x}, W_0 \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , also im Falle  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  folgt  $\|\mathbf{x}\| = \|\tilde{\mathbf{x}}\|$ . Es gilt

$$W_0^{-1} = W_0^* = \overline{W_0}^{-T}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= W_0 x && \text{Hintransf.} \\ x &= W_0^{-1} \tilde{x}_0 = W_0^* \tilde{x}_0 && \text{Rücktransf.} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= W x && \text{DFT} \\ x &= W^{-1} \tilde{x} = \frac{1}{N} W^* \tilde{x} && \text{IDFT} \end{aligned}$$

oder auch

$$x(n) \circ \bullet \tilde{x}(k)$$

$W_0$  ist, wie die Fouriertransformation, zyklisch vom Grade 4:

$$\begin{aligned} W_0^4 &= W_0^0 = I \quad (\text{bzw. } W^4 = N^2 I) \\ &\Rightarrow W_0^3 = W_0^{-1} = W_0^* \end{aligned}$$

$$W_0^2 x = x(-n) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1 \bmod N} = x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (\text{symmetrische Permutationsmatrix, "Spiegelung"})$$

z.B. für  $N = 4$ :

$$W_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Endliche zweidimensionale Fourierreihe mit orthog. 2D-Basisfunktionen:**

$\mathbb{C}^{M \times N} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times N}$ ,  $\dim A = M \times N$

$$A = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \langle A, F_{kl} \rangle F_{kl} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{A}_{kl} F_{kl}$$

$$\text{Fk: } \tilde{A}_{qr} = \langle A, F_{qr} \rangle \quad (3.6)$$

bei orthonormaler Basis gilt:

$$\langle F_{kl}, F_{qr} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = q, l = r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:  $M \times N = 2 \times 4$

$$A = \tilde{A}_{00} F_{00} + \tilde{A}_{01} F_{01} + \tilde{A}_{02} F_{02} + \tilde{A}_{03} F_{03} + \tilde{A}_{10} F_{10} + \tilde{A}_{11} F_{11} + \tilde{A}_{12} F_{12} + \tilde{A}_{13} F_{13}$$

$$\dim F_{kl} = \dim A = M \times N = 2^m \cdot 2^n$$

### 3.2.5 Lineare zweidimensionale Transformation mit separierbarem Kern

Gleichung 3.6 ausgeschrieben lautet:

$$\tilde{A}_{qr} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{kl} F^*(k, l, q, r)$$

**Definition 3.1** Der Kern von  $F$  heißt separierbar, falls gilt:

$$F(k, l, q, r) = u(k, q) \cdot v(l, r)$$

**Definition 3.2** Der Kern heißt symmetrisch, falls  $u = v$

Mit separierbarem  $F$  kann man die Fourierkoeffizienten wie folgt schreiben:

$$\tilde{A}(q, r) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-1} \left( \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} A(k, l) v^*(l, r)}_{\text{zeilenweise Addition}} \right)}_{\text{spaltenweise Addition}} u^*(k, q)$$

**Beispiel**  $M = 2, N = 4$

$$\begin{aligned}\tilde{A}(q, r) &= A_{00}u_{0q}^*v_{0r}^* + A_{01}u_{0q}^*v_{1r}^* + A_{02}u_{0q}^*v_{2r}^* + A_{03}u_{0q}^*v_{3r}^* \\ &+ A_{10}u_{1q}^*v_{0r}^* + A_{11}u_{1q}^*v_{1r}^* + A_{12}u_{1q}^*v_{2r}^* + A_{13}u_{1q}^*v_{3r}^*\end{aligned}$$

Als Matrix geschrieben (Assoziativität der Matrizenmultiplikation):

$$\boxed{\tilde{A}(q, r) = u_q^{T*} A v_r^* = (u_q^{T*} A) v_r^* = u_q^{T*} (A v_r^*)}$$

Nun alle Zeilen und Spalten von  $A$ :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} u_0^{*T} \\ u_1^{*T} \end{pmatrix} \quad A \quad (v_0^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*) \\ M \times M \quad M \times N \quad N \times N$$

**Bildung der 2D-Basisvektoren anhand des Berechnungsschema für  $\tilde{A}(q, r)$**

$$\begin{array}{c|cccc} & v_{0r} & v_{1r} & v_{2r} & v_{3r} \\ \hline u_{0q} & A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ u_{1q} & A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{array}$$

Dies ist das direkte Produkt ( $\hat{=}$ elementweise) zwischen  $A$  und dem dyadischen Produkt von  $u_q v_r^T = A \cdot (u_q v_r^T)$ . Summiert über alle Zeilen und Spalten ergibt das Innenprodukt:

$$\tilde{A}(q, r) = \langle A, F_{qr} \rangle \quad F_{qr} = (u_q v_r^T)$$

Zur Erinnerung (1D):  $\tilde{x}_i = \langle x, \omega_i \rangle$

Also bei separierbarem Kern ergeben sich die orthogonalen Matrizen über dyadisches Produkt (Aussenprodukt):

$$F_{qr} = (u_q v_r^T) = \begin{pmatrix} & y \\ x & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & y \\ x \cdot y \end{pmatrix}$$

Damit sind 2-D unitäre Transformationen mit separierbarem Kern aber auch als eine Folge von eindimensionalen Zeilen- und Spaltentransformationen darstellbar.

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= U A V && \text{verallgemeinerte 2D DFT} \\ \tilde{A} &= U^* \tilde{A} V^* && \text{verallgemeinerte 2D IDFT} \quad * \text{ adjungiert}\end{aligned}$$

Bei separierbarem Kern genügt es, sich mit den korrespondierenden eindimensionalen Zeilen- und Spaltentransformationen zu beschäftigen.

$$\begin{aligned}1D: \quad \tilde{a} &= V a \\ 2D: \quad \tilde{A} &= U[a_0, \dots, a_{N-1}]V \\ &= [\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{N-1}]V\end{aligned}$$

Wenn speziell Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}
 F_{qr} &= (u_q v_r^T) && \text{dyadisches Produkt} \\
 u_q &= \begin{pmatrix} u^{0q} \\ \vdots \\ u^{(M-1)q} \end{pmatrix} && u = e^{j\frac{2\pi}{M}} \\
 v_r &= \begin{pmatrix} v^{0r} \\ \vdots \\ v^{(N-1)r} \end{pmatrix} && v = e^{j\frac{2\pi}{N}} \\
 \text{bzw. } u_{q0} &= u_q / \sqrt{M} && v_{r0} = v_r / \sqrt{N} \\
 \Rightarrow \tilde{A}(q, r) &= c \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} A(k, l) \underbrace{e^{-j2\pi(\frac{kq}{M} + \frac{lr}{N})}}_{F^*(k, l, q, r)} \\
 &= u^*(k, q) v^*(l, r)
 \end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} (0, 0) & (6, 0) & (3, 0) & (2, 0) \\ (3, 0) & (7, 0) & (8, 0) & (5, 0) \end{pmatrix} \\
 \tilde{A} &= W_2 A W_4 \\
 W_2 &= \begin{pmatrix} (1, 0) & (1, 0) \\ (1, 0) & (-1, 0) \end{pmatrix} \\
 W_4 &= \begin{pmatrix} (1, 0) & (1, 0) & (1, 0) & (1, 0) \\ (1, 0) & (0, -1) & (-1, 0) & (0, 1) \\ (1, 0) & (-1, 0) & (1, 0) & (-1, 0) \\ (1, 0) & (0, 1) & (-1, 0) & (0, -1) \end{pmatrix} \\
 A W_4 &= \begin{pmatrix} (11, 0) & (-3, -4) & (-5, 0) & (-3, 4) \\ (23, 0) & (-5, -2) & (-1, 0) & (-5, 2) \end{pmatrix} \\
 \tilde{A} &= \begin{pmatrix} (34, 0) & (-8, -6) & (-6, 0) & (-8, 6) \\ (-12, 0) & (2, -2) & (-4, 0) & (2, 2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**Eigenschaften der DFT**

1.  $x(n) \leftrightarrow \tilde{x}(k)$
2.  $\frac{1}{N} \tilde{x}(n) \leftrightarrow x(-k)$  Symmetrie
3.  $x(n-r) \leftrightarrow \tilde{x}(k) \omega_r^*$  Verschiebung
3.  $x_r = \frac{1}{N} w^* \tilde{x} = \frac{1}{N} (\omega \tilde{x}^*)^*$  alternative Rücktrans. (durch Hintr.)
4.  $x^*(n) \leftrightarrow \tilde{x}^*(-k)$
4.  $x(-n) \leftrightarrow \tilde{x}(-k)$

**3.3 Die Walsh-Transformation**

zunächst Definition von kontinuierlichen Funktionen  $\Rightarrow$  Walsh Transformation, Walsh Reihen, DWT

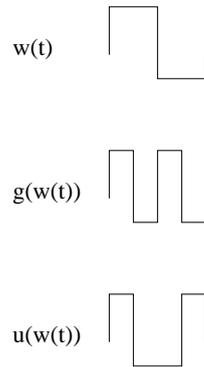


Abbildung 3.3: Die Funktion  $g$  bedeutet stauchen auf die Hälfte und gerade fortsetzen,  $u$  bedeutet stauchen auf die Hälfte und ungerade fortsetzen

### Rekursive Definition der Walsh Funktionen

$$\begin{aligned}
 w_0(t) &\equiv 1 \\
 w_0(t) &= g(w_0(t)) \quad t \in [0, T] \\
 w_1(t) &= u(w_0(t)) \\
 w_2(t) &= u(w_1(t)) \\
 w_3(t) &= g(w_1(t)) \\
 w_i(t) &\rightarrow \begin{cases} w_{2i} = gw_i \\ w_{2i+1} = uw_i \end{cases} \quad i \text{ gerade} \\
 &\quad \begin{cases} w_{2i} = uw_i \\ w_{2i+1} = gw_i \end{cases} \quad i \text{ ungerade} \\
 g(w(t)) &= w(2t) + w(2(t - \frac{T}{2})) \\
 u(w(t)) &= w(2t) - w(2(t - \frac{T}{2}))
 \end{aligned}$$

### Diskrete Walsh Funktionen

Zunächst wird die rekursive Definition der spezielle Hadamard Matrix vorgestellt. Hadamard Matrizen sind orthogonale Matrizen (es gilt allerdings nur  $A^{-1} = \frac{1}{N}A^T$ ) mit dem Wertevorrat  $\{+1, -1\}$

$$\begin{aligned}
 H_1 &= 1 \\
 H_{2N} &= \begin{pmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### Beispiel

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 H_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Walsh Matrix erhält man durch Umordnen der Zeilen der Hadamard Matrix.

$$i' = BR(i \oplus \lfloor i/2 \rfloor) = BR(i'')$$

mit

$\oplus \hat{=}$  stellenweise Addition mod 2 (Antivalenz (xor) oder auch Addition in GF(2))

$i \hat{=}$  Index der Walsh Matrix (mit Index ist die Zeile gemeint - von 0 bis  $N - 1$ )

$i'' \hat{=}$  Index der Hadamard Matrix

$i'' \hat{=}$  Graycode des Index der Walsh Matrix (Graycode siehe A.1)

$BR \hat{=}$  bitreversal (von hi nach lo, aus  $b_2b_1b_0$  wird  $b_0b_1b_2$ )

$$\begin{aligned} i &= 000 \rightarrow i' = BR(000 \oplus 000) = 000 \\ i &= 001 \\ i &= 111 \rightarrow i' = BR(111 \oplus 011) = 001 \end{aligned}$$

Alternative Gewinnung der diskreten Walsh Funktionen durch Abtastwerte der kontinuierlichen Walsh Funktion.

Damit Diskrete Walsh Transformation (DWT):

$$\boxed{\tilde{x} = Wx} \quad \text{Hintransformation}$$

$W$  ist orthogonal und symmetrisch

$$W^{-1} = \frac{1}{N}W^T = \frac{1}{N}W$$

$$\rightarrow \boxed{x = \frac{1}{N}W\tilde{x}} \quad \text{Rücktransformation}$$

oder normiert:

$$W_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}W \quad W_0^{-1} = W_0$$

### 2D (separierbarer Kern)

$$\tilde{x} = \underbrace{W_0}_{M \times M} \underbrace{x}_{M \times N} \underbrace{W_0}_{N \times N} \quad \text{2D - DWT}$$

$$x = W_0 \tilde{x} W_0 \quad \text{2D - IDWT}$$

### Beispiel

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \\ W_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ W_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \tilde{x} &= W_2 x W_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 xW_4 &= \begin{pmatrix} 11 & 1 & 7 & -5 \\ 23 & -3 & -7 & -1 \end{pmatrix} \\
 \tilde{x} &= \begin{pmatrix} 34 & -2 & -14 & -3 \\ -12 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\
 W_{ik} &= W_i W_k^T
 \end{aligned}$$

### 3.3.1 Sequenzbegrenzte Zeitfunktionen

stückweise konstant in Intervallen  $T_0/N$  (für  $N = 2^n$ )

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \omega_i(t) & t \in [0, T_0] \\
 \alpha_i &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \omega_i(t) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t &= kT & T = T_0/N : \\
 x(kT) &= \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \omega_i(kT) & = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \omega_{ik} \\
 x &= W\alpha \\
 \alpha &= \frac{1}{N} Wx
 \end{aligned}$$

d.h. bei sequenzbegrenzten Zeitfunktionen besteht ein direkter Zusammenhang zwischen Abtastwerten der Funktion  $x(t)$  und den Walsh-Fourierkoeffizienten über die DWT.

### 3.3.2 Eigenschaften der Walsh Transformation

- **Vorteil:** Die Transformation ist einerseits schnell zu berechnen (siehe 4.1.2) und außerdem werden nur komplexe Additionen und Vorzeichenwechsel als Operationen benötigt. (Heutzutage nicht mehr relevant)
- **Nachteil:** Fehler nach der Rücktransformation in der Regel größer als bei den anderen Transformationen.

## 3.4 Die KLT - optimale unitäre Transformation

### 3.4.1 Vorbemerkungen

Bei der *Karhunen-Loeve-Transformation* oder auch *Hauptachsentransformation* (im Folgenden kurz mit KLT bezeichnet) werden die Eingangssignale als *stochastische* Signale aufgefasst. Zum Verständnis der KLT werden deswegen zunächst einige wichtige Bezeichnungen für die Untersuchung von stochastischen Signalen eingeführt. Die dabei gemachten Aussagen können aufgrund des beschränkten Umfangs des vorliegenden Skriptums nicht erschöpfend sein, darum werden lediglich die wichtigsten Zusammenhänge in recht informaler Weise erläutert. Eine umfassendere Einführung gibt beispielsweise [Schüssler(1988)].

Ein diskretes Signal kann als eine Menge von Zufallsvariablen betrachtet werden und heißt dann ein *stochastischer Prozess*. Zum Beispiel kann ein digitales Bild der Dimension  $M \times N$  als Feld von  $MN$  Zufallsvariablen interpretiert werden. Ein einzelnes Bild ist dabei eine Ausprägung eines ganzen *Ensembles*

von möglichen Bildern. Auf einem derartigen Ensemble können dann statistische Parameter, beispielsweise die Mittelwerte und Varianzen der Variablen oder die *Kovarianzen* zweier verschiedener Variablen, ermittelt werden. Falls alle Variablenmittelwerte gleich sind und die Kovarianzen nur vom Abstand der Variablen abhängen (d.h. falls die Kovarianz von  $x_i$  und  $x_j$  gleich der Kovarianz von  $x_{i+k}$  und  $x_{j+k}$  ist für alle möglichen  $k$ ), so nennt man den Prozess *stationär*<sup>2</sup>. Im folgenden werden ausschließlich stationäre Prozesse betrachtet.

Bestimmt man nun zu einem gegebenen stationären Prozess  $\mathbf{x}$  mit abzählbar vielen Variablen zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  die Kovarianz von  $x_i$  und  $x_{i+k}$ , so erhält man die *Autokovarianzfolge*  $r_{xx}(k)$ , also

$$r_{xx}(k) = E\{(x_i - \mu_x)(x_{i+k} - \mu_x)^*\} \quad i \in \mathbb{N},$$

wobei  $\mu_x$  den Mittelwert der Variablen bezeichnet. Die *Autokorrelationsfolge*  $\Gamma_{xx}(k)$  dagegen ist wie folgt definiert:

$$\Gamma_{xx}(k) = E\{x_i x_{i+k}^*\} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Das heißt, dass Autokorrelations- und Autokovarianzfolge im Falle eines mittelwertfreien Prozesses identisch sind.

Falls nun die Autokovarianzfolge  $r_{xx}(k)$  eines Prozesses  $\mathbf{x}$  für alle  $k \neq 0$  verschwindet, so heißt der Prozess *unkorreliert*.

**Beispiel** Es sei mit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  ein stochastischer Prozess aus zwei Zufallsvariablen gegeben. Die Variablen  $x_1$  und  $x_2$  seien statistisch unabhängig, das heißt, dass die Verbundverteilungsdichte als Produkt der Einzelverteilungsdichten geschrieben werden kann:

$$p_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = p_{x_1}(x_1) \cdot p_{x_2}(x_2)$$

Dann gilt für die Autokovarianzfolge an der Stelle 1:

$$\begin{aligned} r_{xx}(1) &= E\{(x_1 - \mu_x)(x_2 - \mu_x)^*\} = E\{x_1 x_2^*\} - \mu_x \mu_x^* \\ &= E\{x_1\}E\{x_2^*\} - \mu_x \mu_x^* = \mu_x \mu_x^* - \mu_x \mu_x^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für  $k = 0$  ergibt sich die Varianz von  $\mathbf{x}$  (also  $r_{xx}(0) = \sigma_x^2$ ). Das bedeutet, dass der Prozess unkorreliert ist. Dies gilt für alle Prozesse, deren Variablen untereinander statistisch unabhängig sind, jedoch gilt die Umkehrung im Allgemeinen nicht.

Ein mittelwertfreier, unkorrelierter stochastischer Prozess wird auch als *weiß* bezeichnet. Die Bezeichnung rührt daher, dass die Fourier-transformierte  $\Phi_{xx}$  der Autokorrelationsfolge (das sogenannte *Leistungsdichtespektrum*) konstant ist, denn es gilt:

$$\Phi_{xx}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(k) e^{-j\omega k} = r_{xx}(0) = \sigma_x^2.$$

Anschaulich gesprochen sind also alle Frequenzen im Leistungsdichtespektrum mit gleichem Betrag vertreten, ähnlich wie in weißem Licht alle Frequenzen zu gleichen Anteilen vorkommen.

<sup>2</sup>Streng genommen ist dies lediglich die Definition des *schwach stationären* oder *im weiten Sinne stationären* Prozesses. Da jedoch der *im engen Sinne stationäre* Prozess für die weiteren Betrachtungen ohne Belang ist, wurde auf seine Einführung verzichtet.

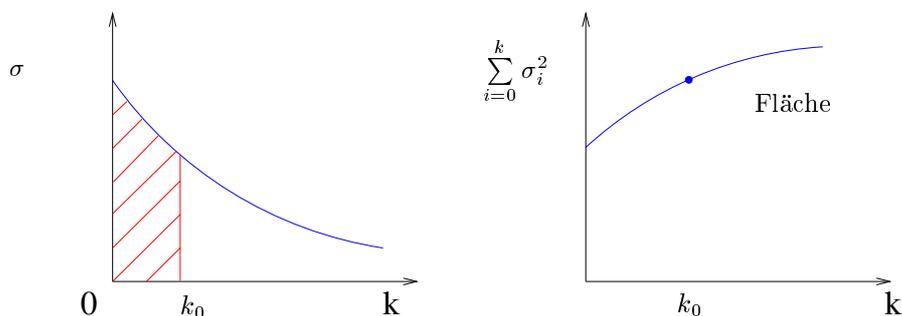


Abbildung 3.4: Die Standardabweichung fällt mit steigendem Koeffizientenindex

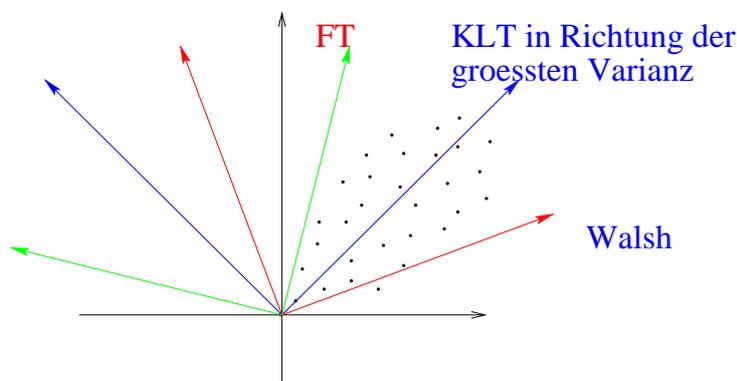


Abbildung 3.5: Mögliche Basisvektoren in einem Raum

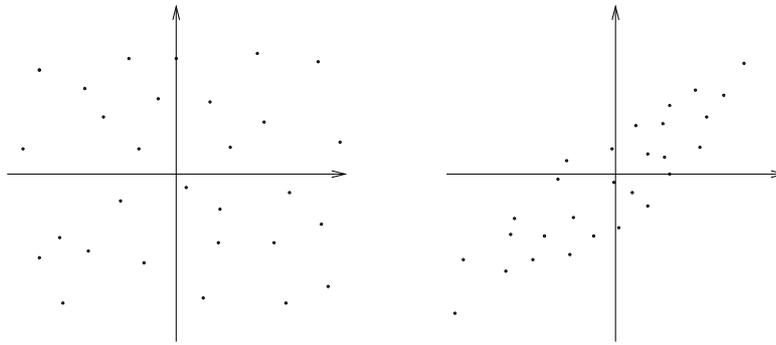
### 3.4.2 Hauptmerkmal der KLT

Es wird eine Datenreihe zugrunde gelegt. Suche eine Basis, die für jeden Abbruchindex optimal ist, derart dass der Fehler, der bei der Synthese (Rücktransformation) gemacht wird, minimal ist. In Abbildung 3.4 ist die Standardabweichung in Abhängigkeit des Koeffizienten (linkes Diagramm) und die Varianz als Fläche - welche bei jedem Abbruchindex  $k_0$  maximal ist - zu sehen (maximale Ungleichverteilung der Merkmale). In Abbildung 3.5 sind symbolisch verschiedene Basen aufgezeigt, wobei Abbildung 3.6 den Unterschied zwischen weißem und korreliertem Prozess aufzeigt

### 3.4.3 Eigenschaften der KLT

#### a) Vorteil

Die KLT ist optimal (in Bezug auf die bestmögliche Darstellung in Unterräumen mit orthogonaler Basis). Falls die Vektorelemente stark korreliert sind, ergibt sich eine hohe Informationsverdichtung in wenigen Koeffizienten der KLT. Die KLT profitiert von starken Korrelationen in den Vektorelementen. Da  $R_{yy}$  ( $y$  bezeichnet die Datenpunkte in den transformierten Koordinaten) eine Diagonalmatrix ist, sind die Werte in  $y$  unkorreliert.



unkorreliert, d.h. weisser Prozess      korreliert

Abbildung 3.6: Datenabhängigkeiten bei stochastischen Prozessen

b) Nachteil

Die KLT ist datenabhängig und muß für jede neuartige Statistik neu berechnet werden. Außerdem existiert für die KLT kein schneller Algorithmus.

### 3.5 Die Diskrete Cosinus Transformation

$$\boxed{\tilde{x} = Cx} \quad C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}}C^T \text{ (reell, orthogonal)}$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \{\sqrt{2}\cos\frac{(2m+1)k\pi}{2N}\} \end{pmatrix}$$

$$k = 1, \dots, N-1 \quad \text{Zeilen (erste Zeile} \equiv 1)$$

$$m = 0, \dots, N-1 \quad \text{Spalten}$$

Die DCT kann schnell über die FFT berechnet werden, wegen [Jain(1989)], Seite 152.

$$\tilde{x}(n) = \text{Re}(\alpha(k) \cdot e^{-j\pi\frac{k}{2N}} \cdot \text{DFT}\{x'(n)\})$$

wobei (Verschachtelung der geraden und ungerade Elemente)

$$\left. \begin{array}{l} x'(n) = x(2n) \\ x'(N-n-1) = x(2n+1) \end{array} \right\} \forall n \in \{0, N/2-1\}$$

und

$$\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\alpha(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \quad k = 1, \dots, N-1$$

Die Basisvektoren der DCT (d.h die Zeilen der Matrix  $C$ ) sind die Eigenvektoren der symmetrischen Tridiagonalmatrix (siehe [Jain(1989)], Seite 153) und zwar

für beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$Q_c = \begin{pmatrix} (1-\alpha) & -\alpha & & & \mathbf{0} \\ -\alpha & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & -\alpha \\ \mathbf{0} & & & -\alpha & (1-\alpha) \end{pmatrix}$$

### 3.5.1 Markov - Prozeß 1.Ordnung

Er entsteht durch Anregung eines rekursiven kausalen Filters der Ordnung 1 mit einem stationären weißen Prozeß  $x(n)$ :

Es gilt also die Gleichung

$$y(n) = x(n) + \rho y(n-1),$$

wobei  $0 < \rho < 1$  ist, da sonst das Filter nicht stabil ist. Durch Auflösung der Rekursion erhält man (mit Induktion):

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i x(n-i),$$

das heißt, dass die Impulsantwort  $h(n)$  gegeben ist durch:

$$h(n) = \rho^n \sigma(n). \quad (3.7)$$

Hierbei bezeichnet  $\sigma(n)$  die Sprungfunktion (siehe hierzu Abschnitt 5.2). Da  $\mathbf{x}$  ein stationärer weißer Prozess ist, gilt für die Autokorrelationsfunktion  $\Gamma_{xx}$ :

$$\Gamma_{xx}(m) = \sigma_x^2 \delta(m), \quad (3.8)$$

wobei  $\sigma_x^2$  die Varianz von  $\mathbf{x}$  bezeichnet (nicht zu verwechseln mit der Sprungfunktion!). Für die Autokorrelationsfunktion  $\Gamma_{yy}$  des Ausgangsprozesses  $\mathbf{y}$  folgt dann:

$$\begin{aligned} \Gamma_{yy}(n, n+m) &= E\{y(n)y(n+m)^T\} \\ &= E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r)x(n+m-r) \right\} \\ &= E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k)h(r)x(n-k)x(n+m-r) \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k)h(r)E\{x(n-k)x(n+m-r)\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k)h(r)\Gamma_{xx}(m+k-r) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Tatsache, dass  $\mathbf{x}$  stationär ist und die Autokorrelation  $E\{x(n-k)x(n+m-r)\}$  folglich nur von der Verschiebung  $m+k-r$

abhängt. Das heißt also, dass  $\mathbf{y}$  ebenfalls ein stationärer Prozess ist. Nach Substitution von  $l := r - k$  und Einsetzen von  $\Gamma_{xx}$  und  $h(n)$  aus den Gleichungen (3.7) und (3.8) erhält man:

$$\begin{aligned}\Gamma_{yy}(m) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l+k)\Gamma_{xx}(m-l) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(m-l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(l+k) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(m-l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^k \sigma(k) \rho^{l+k} \sigma(l+k)\end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$\sigma(l+k)\sigma(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{für } l \geq 0 \\ \sigma(l+k) & \text{für } l < 0 \end{cases}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma_{yy}(m) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(m-l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^k \rho^{l+k} \sigma(k) \\ &+ \sum_{l=-1}^{-\infty} \sigma_x^2 \delta(m-l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^k \rho^{l+k} \sigma(l+k) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(m-l) \rho^l \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} + \sum_{l=-1}^{-\infty} \sigma_x^2 \delta(m-l) \rho^l \sum_{k=-l}^{\infty} \rho^{2k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(m-l) \rho^l \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} + \sum_{l=-1}^{-\infty} \sigma_x^2 \delta(m-l) \rho^l \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2(k-l)}\end{aligned}\tag{3.10}$$

Nach Anwenden der geometrischen Reihe (dies ist ja wegen  $|\rho| < 1$  möglich) folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma_{yy}(m) &= \sigma_x^2 \left( \sum_{l=0}^{\infty} \delta(m-l) \rho^l \frac{1}{1-\rho^2} + \sum_{l=-1}^{-\infty} \delta(m-l) \rho^{-l} \frac{1}{1-\rho^2} \right) \\ &= \frac{\sigma_x^2}{1-\rho^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(m-l) \rho^{|l|} \\ &= \frac{\sigma_x^2}{1-\rho^2} \rho^{|m|}\end{aligned}$$

Die Autokorrelierte ist in Abb. 3.7 zu sehen. Da  $\mathbf{y}$  stationär und mittelwertfrei ist, entspricht die Autokovarianzfunktion der Autokorrelationsfunktion. Das

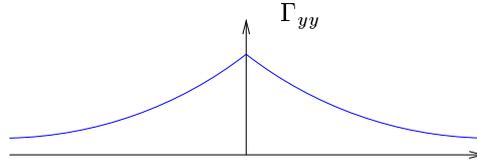


Abbildung 3.7: Korrelation mit benachbarten Pixeln

heißt, dass die Kovarianzmatrix eine Töplitzmatrix der Form

$$R_{yy} = \frac{\sigma_x^2}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \rho^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \rho \\ \rho^{N-1} & \dots & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

### 3.5.2 Bedeutung der DCT

Die DCT approximiert die KLT sehr gut für Markov-Sequenzen erster Ordnung der Länge  $n$ , deren Korrelationsmatrix gegeben ist durch:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \rho^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \rho \\ \rho^{N-1} & \dots & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{spezielle Töplitz-Matrix})$$

mit  $\rho$  nahe bei 1 und  $\rho < 1$ . (Bei  $\rho$  weit weg von 1 ist die Korrelation mit eng benachbarten Pixeln gering) (Deswegen Transformation für JPEG)

Der Grund liegt darin, daß  $R^{-1}$  eine symmetrische Tridiagonalmatrix ist, welche für  $\beta^2 = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}$  und  $\alpha = \frac{\rho}{1+\rho^2}$  die folgende Gleichung erfüllt:

$$\beta^2 R^{-1} = 1 - \rho\alpha$$

$$\beta^2 R^{-1} = \begin{pmatrix} (1 - \rho\alpha) & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & (1 - \rho\alpha) \end{pmatrix}$$

und damit:

$$\beta^2 R^{-1} \approx Q_c \quad \text{für } \rho \approx 1$$

und deshalb sind die Eigenvektoren von  $R$  und  $Q_c$  annähernd gleich. Dies verdeutlicht die große Bedeutung der DCT für die Bildkodierung, nämlich als Approximation einer Optimalcodierung! Zum Vergleich: Die KLT würde  $R$  diagonalisieren und aus den Eigenwerten die Basis berechnen...

Eine Matrix und ihre Inverse besitzen die gleichen Eigenvektoren. Die Eigenvektoren transformieren eine Matrix auf Diagonalaform:

$$FAF^* = \Lambda$$

wegen  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$  und da  $F$  unitär ist ( $F^{-1} = F^*$ ) folgt aus:

$$(FAF^*)^{-1} = \Lambda^{-1}$$

die Gleichung:

$$FA^{-1}F^* = \Lambda^{-1}$$

Daraus folgt für die Eigenwerte  $\lambda'_i$  von  $A^{-1}$ :

$$\lambda'_i = \frac{1}{\lambda_i} \text{ mit: } \lambda_i \text{ EW von } A$$

**Beispiel:**

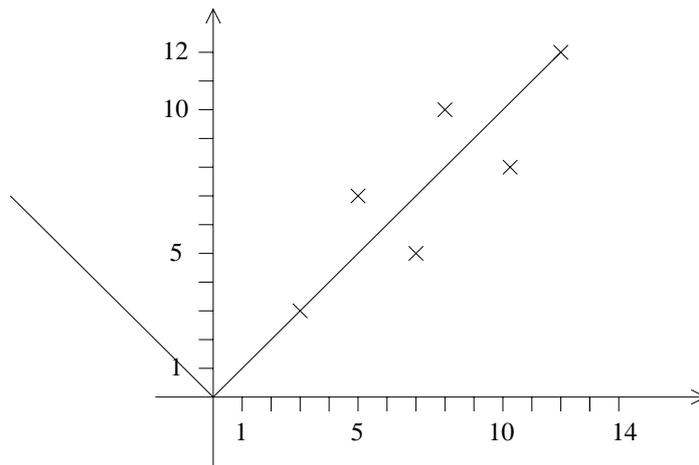


Abbildung 3.8: Repräsentation der Vektoren im Koordinatensystem

$$\{x_i\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R = E\{x_i, x_i^T\} = \begin{pmatrix} 65,16 & 63,83 \\ 63,83 & 65,16 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 129, \lambda_2 = 1,33; e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, R_{yy} = A^T R_{xx} A = \begin{pmatrix} 129 & 0 \\ 0 & 1,33 \end{pmatrix}, A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Projektion in Richtung } e'_1:$$

$$P = e_1 e_1^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = I - P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kosinus-Transformation:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(hier zufälligerweise identisch mit der KLT). Bei der KLT ist  $\sum_{k=0}^M |\alpha_k|^2$  maximal.

## 3.6 Methoden zur Bildkodierung

(insbesondere Transformationskodierung)

### 3.6.1 Methoden zur Einzelbildkodierung

Ein Bild wird unterteilt in Teilbilder, z. B. der Größe  $8 \times 8$ , also für ein Bild der Gesamtgröße  $32 \times 32$  z. B.:

$$\begin{pmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} & X_{03} \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{20} & X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{30} & X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}$$

Die Teilbilder  $\{X_{ij}\}$  bilden das Ensemble für die stochastischen Betrachtungen. Das Ziel einer Transformationskodierung ist, die Korrelation zwischen den Pixeln zu reduzieren. Man transformiert und hat mit den transformierten Entwicklungskoeffizienten (Fourierkoeffizienten) weitgehend unkorrelierte Verhältnisse (oder man eliminiert die stochastischen Abhängigkeiten, sodaß die transformierten Bilder unkorreliert sind).

Beispiel zur Illustration (siehe Abb. 3.9):

Wir nehmen eine 3-Bit-Kodierung der Grauwerte an (8 Graustufen). Wir gruppieren Teilbilder mit zwei benachbarten Punkten der Größe  $1 \times 2$  zu Bildvektoren  $x = (x_1 \ x_2)$ . Falls man diese Vektoren zweidimensional darstellt, erhält man wegen der 8 Graustufen die abgebildeten 64 Vektoren.

Da benachbarte Pixel i.a. mit hoher Wahrscheinlichkeit ähnliche Grauwerte besitzen, gruppieren sich die Vektoren um die erste Hauptdiagonale.

**JPEG-Standard zur Einzelbildkodierung (*still video*)** ("Joint Photographic Expert Group")

**MPEG-Standard zur Kodierung von Bildsequenzen (*interframe compression*)** ("Moving Picture Expert Group")

Farbbild mit guter Video-Auflösung:  $\approx 160 \text{ MBit/sec}$ . Kompressionsverfahren nutzen Redundanz in Bildern und Nichtlinearität der menschlichen Wahrnehmung. Ausgenutzt wird die Korrelation im Ortsbereich (intra-frame) und die Korrelation im Zeitbereich (inter-frame-Kodierung). Nichtlinearität der menschlichen Wahrnehmung:

Auge ist wesentlich empfindlicher für die Luminanz (Helligkeit) als für die Chrominanz (Farbe). Deshalb gröbere Quantisierung der Chrominanz als bei Luminanz und auch geringere örtliche Abtastrate. Man unterscheidet zwischen:

- verlustfreier Kodierung (Gewinn 2:1 - 3:1)

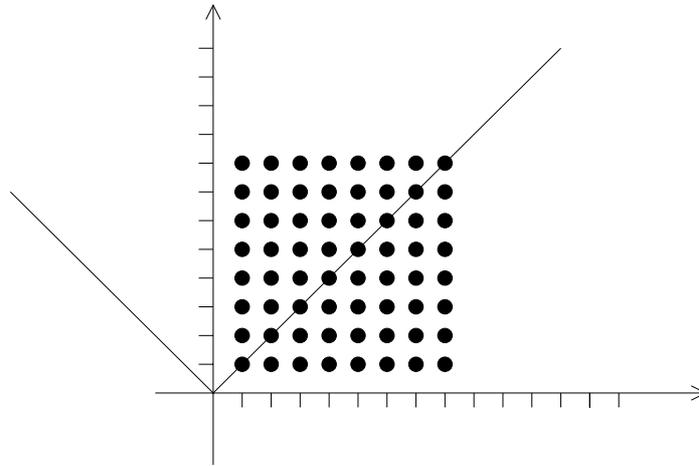


Abbildung 3.9: Darstellung der 64 Vektoren im Koordinatensystem

- verlustbehafteter Kodierung (Gewinn 10:1 - 50:1 ohne sichtbaren Qualitätsverlust)

Hier soll nur der Baseline-Entwurf diskutiert werden (abgespeckte Version). Der volle Standard ist recht umfangreich.

Ziele des vollen Standards:

- einstellbare Qualitäts-/Kompressionsrate (Parameter)
- verlustfreie Kodierung möglich
- hierarchische Kodierung (verschiedene Auflösungen möglich)

Baseline-sequential-CODEC (Coder/Decoder):

- Shift der Grauwerte von  $[0, 2^P - 1]$  zu signed integer, also  $[-2^{P-1}, 2^{P-1}]$
- DCT  $8 \times 8 \Rightarrow 1$  DC-Koeffizient, 63 AC-Koeffizienten; separater Entwurf für 8-Bit- (Video) und 12-Bit-Bilder (Medizin)
- Quantisierer (verlustbehaftet)
- DC-Komponente separate Kodierung, da dominant; *differential encoding* wegen hoher Korrelation
- Die Zig-Zag-Sequenzen-Kodierung der AC-Koeffizienten verbessert die anschließende Entropie-Kodierung (niederfrequente Anteile haben höhere Werte als hochfrequente)
- Entropie-Kodierung (verlustfrei):
  - Huffman-Kodierung (Baseline)
  - Arithmetische Kodierung (keine Kodier-Tabellen, adaptiert sich an das Bild, bei Huffman dagegen vordefinierte Tabellen)

**Qualität**

(bits/Pixel gibt die Gesamtzahl der Bits an, einschließlich Chrominanzkomponenten, dividiert durch die Anzahl der samples in der Luminanzkomponente)

0.25 - 0.5	bits/pixel	mäßige bis gute Qualität
0.5 - 0.75	bits/pixel	gut - sehr gut
0.75 - 1.5	bits/pixel	exzellente Qualität
1.5 - 2	bits/pixel	i.a. vom Original nicht zu unterscheiden

Vor Huffman Codierung zuerst eine Lauffängerkodierung

# Kapitel 4

## Schnelle Algorithmen

(zur Digitalen Signalverarbeitung)

### 4.1 Allgemeines

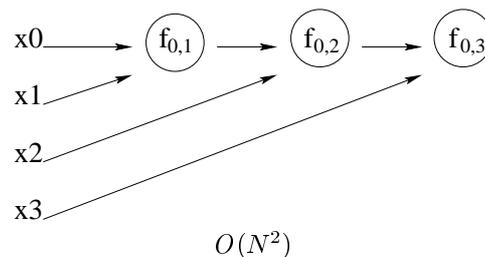
#### 4.1.1 Faktorisierung

diskrete quadratische Transformation (linear/nichtlinear)

$$\boxed{\tilde{x} = T(x)} \quad \dim x = \dim \tilde{x} = N = 2^n$$

z.B.

$$\tilde{x}_j = f_{j,N-1}(\dots f_{j,3}(f_{j,2}(f_{j,1}(x_0, x_1), x_2), \dots, x_{N-1}))$$



$N = 4$

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= Wx \\ \tilde{x}_0 &= \underbrace{\underbrace{\underbrace{(W_{00}x_0 + W_{01}x_1)}_{f_{0,1}(x_0, x_1)} + W_{02}x_2}_{f_{0,2}(., x_2)} + W_{03}x_3}_{f_{0,3}(., x_3)} \end{aligned}$$

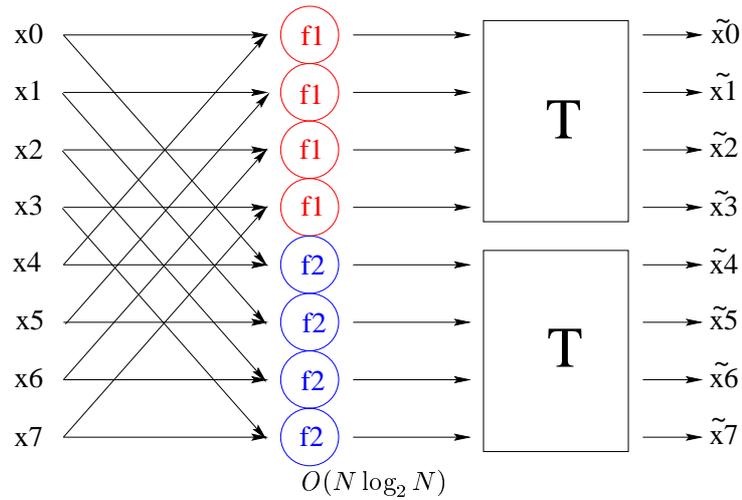
Läßt sich das Problem jedoch faktorisieren, d.h. kann man die Transformation der Dimension  $N$  rekursiv auf 2 Transformationen der halben Dimension

zerlegen (bei linearem Verschmelzungsaufwand), so erhält man:

$$x = \begin{bmatrix} x_{1/2} \\ x_{2/2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} f_1(\widetilde{x_{1/2}, x_{2/2}}) \\ f_2(x_{1/2}, x_{2/2}) \end{bmatrix}$$

Obige Darstellung beschreibt die komponentenweise dyadische (2-stellige) Verknüpfung korrespondierender Elemente der beiden Halbvektoren. Graphisch:



#### 4.1.2 Walsh - Hadamard (FWT)

$$\boxed{\tilde{x} = Hx} \quad \text{mit } H^N = \begin{bmatrix} H^{N/2} & H^{N/2} \\ H^{N/2} & -H^{N/2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H & H \\ H & -H \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ha + Hb \\ Ha - Hb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H(a+b) \\ H(a-b) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} t(N) &= 2t\left(\frac{N}{2}\right) + N \\ \Rightarrow t(N) &= O(N \lg N) \end{aligned}}$$

#### 4.1.3 Rechenregeln rekursiver Zerlegungen

I) Konstanter Verschmelzungsaufwand

$$t(N) = \begin{cases} b & \text{für } N = 1 \\ a \cdot t\left(\frac{N}{c}\right) + d & \text{für } N > 1 \end{cases} \quad \text{mit } N = c^n \quad a, b > 0$$

Asymptotische Komplexität

$$t(N) = \begin{cases} O(N^{\log_2 a}) & \text{für } a \neq 1 \\ O(\log_2 N) & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

II) Linearer Verschmelzungsaufwand  $b \cdot N$

$$t(N) = \begin{cases} b & \text{für } N = 1 \\ a \cdot t(\frac{N}{c}) + b \cdot N & \text{für } N > 1 \end{cases} \quad \text{mit } N = c^n \quad a, b > 0$$

Komplexität

$$t(N) = \begin{cases} O(N) & \text{für } a < c \\ O(N \cdot \log_c N) & \text{für } a = c \\ O(N^{\log_c a}) & \text{für } a > c \end{cases}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} t(N) &= a \cdot t\left(\frac{N}{c}\right) + bN \\ &= a\left(a \cdot t\left(\frac{N}{c^2}\right) + b\frac{N}{c}\right) + bN \\ &\quad \vdots \\ &= bN \cdot \sum_{i=0}^n \left(\frac{a}{c}\right)^i \quad \text{mit } n = \log_c N \end{aligned} \quad (4.1)$$

(mit geometrischer Summenformel):  $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

a)  $a < c$

$$t(N) = bN \frac{\left(\frac{a}{c}\right)^{n+1} - 1}{\frac{a}{c} - 1} \approx bN \frac{1}{1 - \frac{a}{c}} \quad \text{für } \left(\frac{a}{c}\right)^{n+1} \ll 1$$

daraus folgt:

$$t(N) = O(N)$$

b)  $a = c$

aus (4.1) folgt:

$$t(N) = bN(n+1) = O(N \log_c N)$$

c)  $a > c$

Aus

$$t(N) = bN \frac{\left(\frac{a}{c}\right)^{n+1} - 1}{\frac{a}{c} - 1}$$

folgt:

$$n = \log_c N = \log_c a \cdot \log_a N \quad \text{mit } N = a^{\log_a N}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(N) &= O\left(N \cdot \left(\left(\frac{a}{c}\right)^{n+1} - 1\right)\right) = O(N) \cdot O\left(\left(\frac{a}{c}\right)^{n+1} - 1\right) \\ &= O(N) \cdot O\left(\left(\frac{a}{c}\right)^{n+1}\right) = O\left(N \cdot \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c}\right)^n\right) \\ &= O\left(N \cdot \left(\frac{a^{\log_c N}}{c}\right)\right) = O\left(N \frac{a^{\log_c N}}{c^{\log_c N}}\right) \\ &= O\left(a^{\log_c N}\right) = O\left(a^{\log_a N \cdot \log_c a}\right) \\ &= O\left(N^{\log_c a}\right) \end{aligned}$$

□

**Aufwand:**

$N$	$N^2$	$N \log N$	Gewinn: $\frac{N^2}{N \log N} = \frac{N}{\log N}$
100	10000	664	15
500	250000	4483	55
1000	$10^6$	104	100
$10^6$	$10^{12}$	$2 \cdot 10^7$	50000

**4.1.4 Konsequenzen der Faktorisierung**

1. Schnelle Algorithmen mit  $N \log N$  dyadischen Verknüpfungen
2. In-place-Algorithmus
3. Modulare Nutzung
  - Hardware: modularer Aufbau aus Bausteinen kleinerer Dimension
  - Software: modulare Nutzung für Transformation bei beschränktem Hauptspeicher
4. Rekursion wichtig für systemtheoretische Beschreibung (z. B. bei Induktionsschlüssen)

**4.1.5 Butterfly- und deBruign-Graphen**

(Schematischer Aufbau der Graphen: siehe Umdruck, Seite 12.)

Um vom Butterfly- zum deBruign-Graphen zu gelangen, muß Funktion  $f_r$  von Schicht  $j$  des Butterfly-Graphen an die Stelle  $r'$  im deBruign-Graphen mit  $r'^{(j)} = \tau_j(r_B^{(0)}) = \tau_1(r_B^{(j-1)})$ .  $\tau_j$  bezeichnet  $j$  zyklische Verschiebungen nach links von  $r$ , dargestellt im Basis-B-System mit  $n = \log_B N$  Stellen (z.B.: 011  $\rightarrow$  110). Es gibt zwei kanonische Formen der Faktorisierung:

- 1. Kanonische Form:

$$\tilde{x} = V(T_1(x_{12}), T_2(x_{22}))$$

Auf separaten Teilmengen rechnen, dann verschmelzen (z.B.: Mergesort). Siehe hierzu Abb. 4.1.

- 2. Kanonische Form:

$$\tilde{x} = T_1(V(x_{12}, x_{22})), T_2(V(x_{12}, x_{22}))$$

Zuerst verschmelzen, dann getrennt rechnen (z.B.: Quicksort). Siehe hierzu Abb. 4.2.

Anzahl der dyadischen Verknüpfungen bei der Basis-B-Faktorisierung:

$$\begin{array}{ll}
 (B-1)N \log N & \text{zweistellige Verknüpfungen} \\
 \log_B N & \text{Schichten} \\
 N(B-1) & \text{Operationen pro Schicht}
 \end{array}$$

Beispiele:

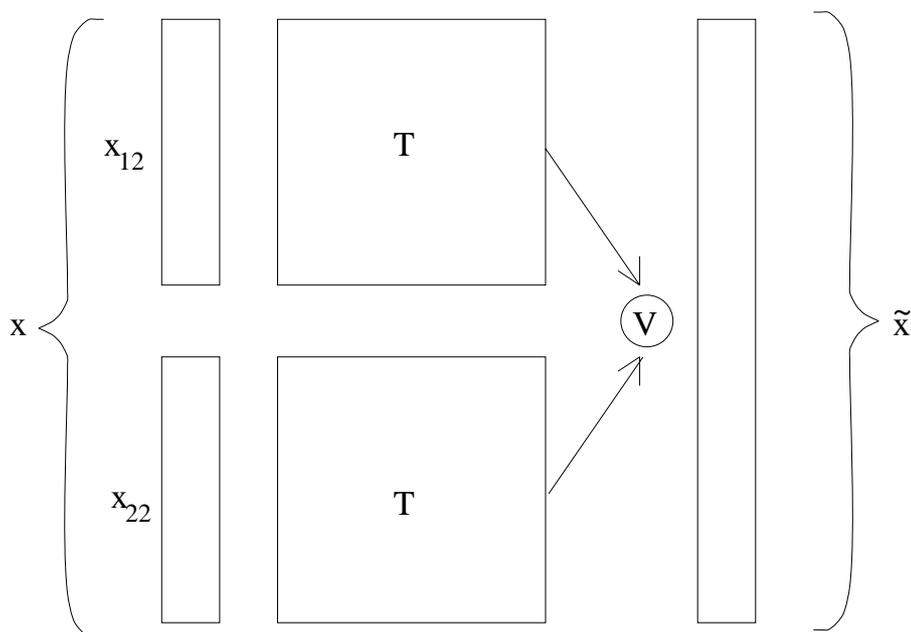


Abbildung 4.1: 1. kanonische Form der Faktorisierung

- $B = 2, N = 1024 \Rightarrow 10$  Schichten, 1024 Operationen pro Schicht  $\Rightarrow 10240$  Operationen
- $B = 4, N = 1024 \Rightarrow 5$  Schichten,  $3 \cdot 1024$  Operationen pro Schicht  $\Rightarrow 15360$  Operationen
- $B = N = 1024 \Rightarrow 1$  Schicht,  $N^2$  Operationen pro Schicht  $\Rightarrow 1048536 \approx 10^6$  Operationen

## 4.2 Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

$$f_1(a, b) = (a + b); \quad f_2(a, b) = (a - b)\omega^{-n} \quad (4.2)$$

( $n \hat{=}$  Index des Koeffizienten). Die FFT entspricht einer besonders schnellen Realisierung der DFT. Es gibt zwei Berechnungsalgorithmen, nämlich den nach Sande-Tukey (*decimation in frequency*, siehe [Jaehne(1997)] S. 72) und den nach Cooley-Tukey (*decimation in time*, siehe [Jaehne(1997)] S. 64). Die entsprechenden Graphen sind im Umdruck auf Seite 15 zu sehen.

In der folgenden Tabelle ist *bit-reversal* rekursiv dargestellt (US  $\hat{=}$  Unshuffle, "entzahn" der gerad- bzw. ungeradzahigen Elemente). Das bit-reversal entspricht der rekursiven Aufteilung in gerade und ungerade Vektoren (Bitdarstellung von links nach rechts), siehe auch [Jaehne(1997)] S. 68.

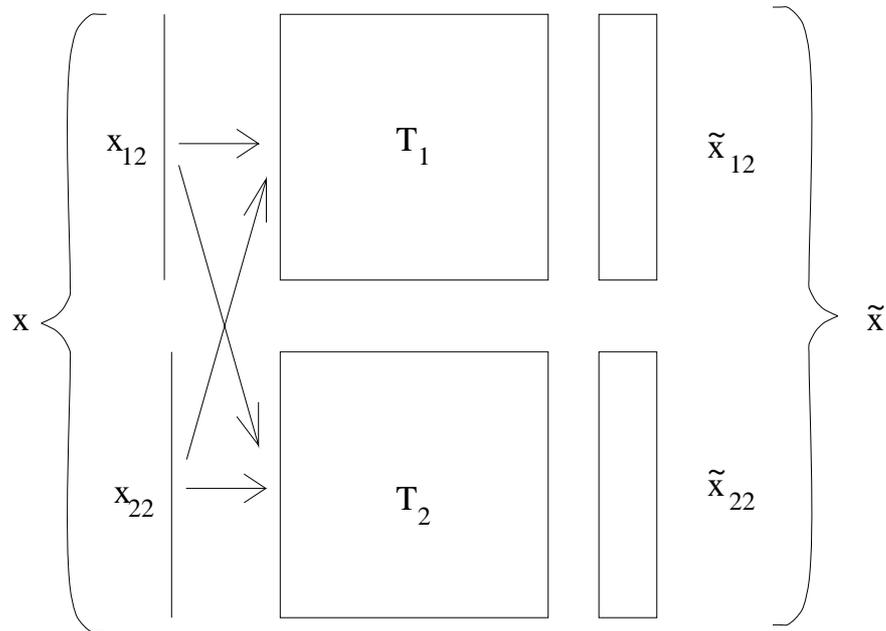


Abbildung 4.2: 2. kanonische Form der Faktorisierung

Zahl	Binärwert	Bit-reversal	Dezimalwert	US1	US2	US3
0	0000	0000	0	0	0	0
1	0001	1000	8	2	4	8
2	0010	0100	4	4	8	4
3	0011	1100	12	6	12	12
4	0100	0010	2	8	2	2
5	0101	1010	10	10	6	10
6	0110	0110	6	12	10	6
7	0111	1110	14	14	14	14
8	1000	0001	1	1	1	1
9	1001	1001	9	3	5	9
10	1010	0101	5	5	9	5
11	1011	1101	13	7	13	13
12	1100	0011	3	9	3	3
13	1101	1011	11	11	7	11
14	1110	0111	7	13	11	7
15	1111	1111	15	15	15	15

**Rekursion für Fourier-Matrix aus Sande-Tukey** Die Existenz einer solchen Zerlegung ist aus Gleichung 4.2 zu erkennen, wobei  $D$  die Rolle der Gewichtung mit  $\omega^{-n}$  übernimmt.

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F' & F' \\ F'D & -F'D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F'(x_{12} + x_{22}) \\ F'D(x_{12} - x_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F' & 0 \\ 0 & F'D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} + x_{22} \\ x_{12} - x_{22} \end{pmatrix}$$

mit:

$$\omega = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad D = \text{diag}(\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{\frac{N}{2}-1})$$

$F'$  bezeichnet hierbei die nicht frequenzgeordnete Fourier-Matrix.

#### 4.2.1 Gleichwertigkeit Cooley-Tukey / Sande-Tukey

Aus der Rekursionsgleichung folgt für

- Cooley-Tukey:

$$\tilde{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} F & DF \\ F & -DF \end{pmatrix}}_{F'} \cdot Px = Fx, \text{ wobei } F = F^T$$

- Sande-Tukey: (die Umordnung findet im Frequenzraum statt)

$$P\tilde{x} = \begin{pmatrix} F & F \\ FD & -FD \end{pmatrix} x$$

$P$  ist die orthogonale Unshuffle-Permutationsmatrix, z.B. für  $N = 8$ :

$$P_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt (Sande-Tukey):

$$F^N = P^T \cdot \begin{pmatrix} F^{\frac{N}{2}} & F^{\frac{N}{2}} \\ F^{\frac{N}{2}}D & F^{\frac{N}{2}}D \end{pmatrix}$$

Bei Identität muß gelten:

$$P^T \begin{pmatrix} F & F \\ FD & -FD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & DF \\ F & -DF \end{pmatrix} P$$

Da  $F$  symmetrisch ist, und wegen  $(AB)^T = B^T A^T$  und

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \left( P^T \begin{pmatrix} F & F \\ FD & -FD \end{pmatrix} \right)^{TT} &= \left( \begin{pmatrix} F^T & (FD)^T \\ F^T & (-FD)^T \end{pmatrix} P \right)^T \\ &= \left( \begin{pmatrix} F & DF \\ F & -DF \end{pmatrix} P \right)^T = \begin{pmatrix} F & DF \\ F & -DF \end{pmatrix} P \end{aligned}$$

**FFT auf Parallelprozessoren** siehe Umdruck Seite 12

**triviale Ergänzungen:** z. B.:  $x = \begin{pmatrix} x' \\ x' \end{pmatrix}$ . Sande-Tukey:  $\tilde{x} = 2 \begin{pmatrix} \tilde{x}'_0 \\ 0 \\ \tilde{x}'_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ .

(Siehe hierzu Abb. 4.3).

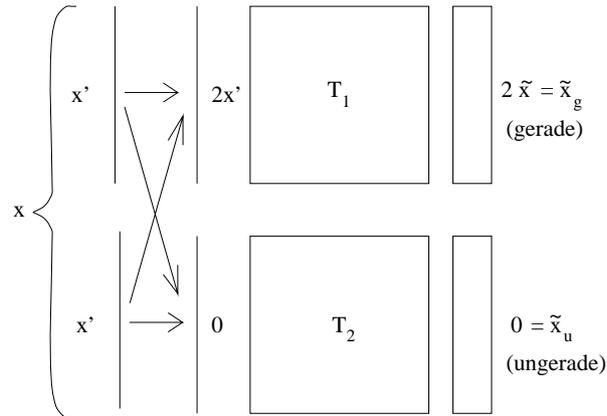


Abbildung 4.3: triviale Ergänzung mit Sande-Tukey

**duale Beziehung:** (Siehe hierzu Abb. 4.4).

$$\text{Cooley-Tukey: } x = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_g \\ \tilde{x}_u \end{pmatrix} \text{ (Siehe$$

#### 4.2.2 Transformation zweier reeller Folgen $a, b$ mit einer komplexen FFT

$$x(n) = a(n) + jb(n) \Rightarrow \tilde{x}(k) = \tilde{a}(k) + j\tilde{b}(k)$$

Wie in 3.2.2 (Gleichungen 3.2 und 3.3 oder auch [Jaehne(1997)] S. 76) gesehen, läßt sich jede Funktion in einen konjugiert symmetrischen und einen konjugiert anti-symmetrischen Teil zerlegen.

$$\begin{aligned} \tilde{a}(k) &= \tilde{x}_e(k) = \frac{1}{2}(\tilde{x}(k) + \tilde{x}^*(-k)) && \text{konjugiert symmetrisch} \\ j\tilde{b}(k) &= \tilde{x}_o(k) = \frac{1}{2}(\tilde{x}(k) - \tilde{x}^*(-k)) && \text{konjugiert anti-symmetrisch} \end{aligned}$$

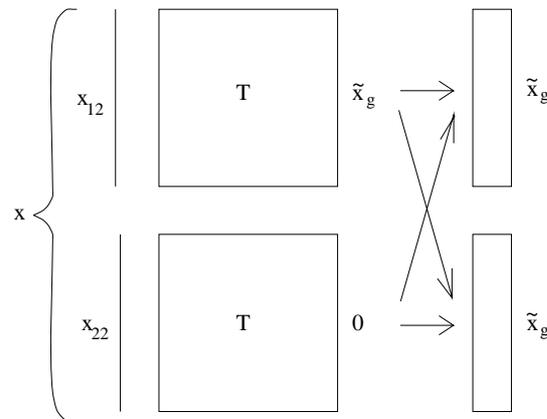


Abbildung 4.4: duale Beziehung für Cooley-Tukey

### 4.2.3 Transformation von $2N$ reellen Werten mit einer komplexen Transformation der Länge $N$

**Cooley Tukey** Es werden, wie im vorhergehenden Abschnitt, die eine Hälfte der reellen Werte in den Realteil des Vektors  $x$  und die andere Hälfte in den Imaginärteil gespeichert. Dann wird dieser Vektor transformiert und die Frequenzen der jeweils  $N$  Werte wieder unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften aus 3.2.2 in  $\tilde{x}_g$  und  $\tilde{x}_n$  getrennt und es wird eine weitere Schicht der FFT nach Cooley Tukey berechnet, welche dann die vollständige Transformierte der Länge  $2N$  darstellt.

$$x_g \rightarrow \text{Realteil}; \quad x_n \rightarrow \text{Imaginärteil} \quad (\text{Trick von oben})$$

dann (aus Cooley-Tukey)

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} (\tilde{x}_g) + d \circ (\tilde{x}_n) \\ (\tilde{x}_g) - d \circ (\tilde{x}_n) \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^{N-1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \omega = e^{-j2\pi/N} \\ \circ \hat{=} \text{punktweise Mult.} \end{array}$$

#### Anmerkung:

Zusätzliche Nutzung von Symmetrien  $\Rightarrow$  Basis-4 Algorithmus / Basis-8 Algorithmus  $\Rightarrow$  weniger Multiplikationen (mehr Additionen). Programmieretechnik etwas aufwendiger.

- prime-FFT-Algorithm
- Mixed-Radix-Algorithm
- Winograd Algorithm (oder Minimum-Multiplication)  
aber sehr ungleichmäßig + sehr stark von Dimension abhängig

### 4.3 Weitere Anwendung mit dem Faktorisierungsansatz

- schnelles paralleles Sortieren  
Vollsortierer wird aufgeteilt in Vollsortierer halber Dimension  
Komplexität: seriell:  $N(ldN^2)$ ; parallel:  $\approx (ldN)^2$  Zyklen
- dynamische Programmierung  
(Analyse von Markov-Ketten)
  - Spracherkennung
  - Bildrestauration
  - Kontur-Konnektivitäts-Analyse
- Innenprodukt
- CT, lageinvariante Mustererkennung
- Polynomberechnung

### 4.4 Zweidimensionale Transformationen

1. direkte Berechnung der Fk.  
 $dim A = N \times N = 2^n \times 2^n$

$$\tilde{A}_{ij} = \langle A, w_{ij} \rangle \quad O(N^2)$$

$N^2$ Fk.  $\Rightarrow$  Gesamtaufwand  $O(N^4)$

2. 2D-Transformation mit separierbarem Kern

$$\tilde{A} = W \underbrace{AW}_{\substack{N^3 \\ 2N^3}} \quad O(N^3)$$

3. mit schneller 1D Transformation

$$\tilde{A} = W \underbrace{AW}_{\substack{N^2 ldN \\ 2N^2 ldN}} \quad O(N^2 \log N)$$

$WA \hat{=}$  Spaltentransformation;  $AW \hat{=}$  Zeilentransformation

4. schneller 2D-Algorithmus  
Die Aufteilung der Bild-Vektoren erfolgt wie in Abbildung 4.5.

$$T(N) = 4T(N/4) + N \Rightarrow T(N) = O(N \log N)$$

oder mit  $N^2$  Pixeln:  $O(N^2 ldN)$ .

Die Prinzipien sind in [Jaehne(1997)] S. 75 dargelegt.

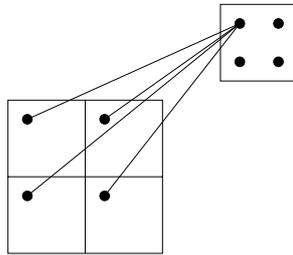


Abbildung 4.5: Auftrennung der Vektoren im zwei-dimensionalen Fall

#### 4.4.1 Eindimensionale Realisierung der 2D FFT

z.B.  $M \times N = 2 \times 4$      $M = 2^m; N = 2^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix}$$

Die eindimensionale Realisierung entspricht dem Stapeln der Spalten- oder Zeilenvektoren. Topologisch identisch mit 1D Transformation der Länge 8!!

#### 4.4.2 Diskussion der Bilder mit Fourier- und Walsh-Transformation

Bei reellen Funktionen gilt bei Anwendung der DFT:

- 1D:  $\tilde{x}_{-i} = \tilde{x}_i^* \quad (-i) \bmod N$
- 2D:  $\tilde{x}_{-k_1, -k_2} = \tilde{x}_{k_1, k_2}^*$  mit  $0 \leq k_1 \leq M - 1 \pmod{M}$  und  $0 \leq k_2 \leq N - 1 \pmod{N}$



# Kapitel 5

## Bildfilterung und Korrelation

### 5.1 Einige Beispiele

#### 5.1.1 lineare Filterung

Ein FIR-Filter ist ein Filter mit endlicher Impulsantwort (finite impulse response). Zum Beispiel stellt ein Filter mit Impulsantwort

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Tiefpassfilter dar (Mittelung), während eine Impulsantwort

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ein Hochpassfilter bedeutet (Kantenverschärfung).

#### 5.1.2 nichtlineare Filterung

Median-Filter: Rauschunterdrückung bei gleichzeitigem Erhalten von Kanten (siehe Abb. 5.1)

### 5.2 Diskrete Signale und Systeme

**Definition 5.1** Ein diskretes Signal ist eine Folge komplexer Zahlen. Notation:

$$\mathbf{x} = \{x(n)\} \quad \forall -\infty < n < \infty$$

Die Menge aller diskreten Signale nennt man auch den diskreten Signalraum.

**Definition 5.2** Der  $\delta$ -Impuls ist ein diskretes Signal, das wie folgt definiert ist:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

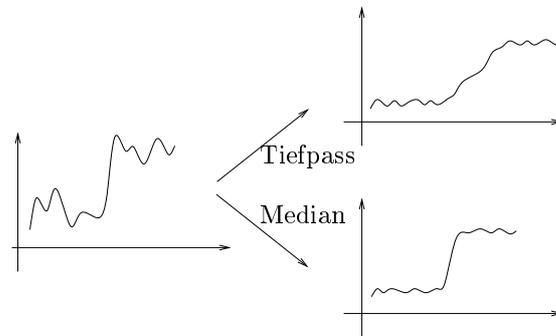


Abbildung 5.1: Filterung einer verrauschten Kante mit Tiefpass- und Medianfilter

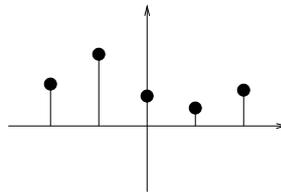


Abbildung 5.2: Darstellung eines diskreten Signals

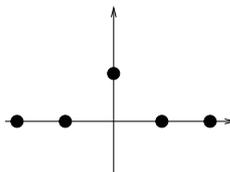


Abbildung 5.3:  $\delta$ -Impuls

**Beispiele** Abb. 5.2 zeigt ein Beispiel für ein diskretes Signal. Der  $\delta$ -Impuls ist in Abb. 5.3 zu sehen.

Jedes diskrete Signal  $x$  kann nun wie folgt als gewichtete Summe von verschobenen  $\delta$ -Impulsen dargestellt werden:

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i) \quad (5.1)$$

**Definition 5.3** Die Sprungfunktion  $\sigma$  ist ein diskretes Signal und ist wie folgt definiert:

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sum_{i=0}^{\infty} \delta(n-i) \\ \delta(n) &= \sigma(n) - \sigma(n-1) \end{aligned}$$

**Definition 5.4** Ein lineares diskretes System  $A$  ist eine lineare Abbildung des diskreten Signalraumes auf sich selbst. Es gilt also  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  und für diskrete Signale  $x_1$  und  $x_2$ :

$$A\{\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)\} = \alpha_1 A\{x_1(n)\} + \alpha_2 A\{x_2(n)\}$$

Wenn im Folgenden von Systemen die Rede sein wird, so sind immer lineare diskrete Systeme gemeint, solange nichts Gegenteiliges vermerkt wird.

**Definition 5.5** Ein System  $A$  heißt zeitinvariant wenn für alle Zahlen  $v \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$A\{x(n-v)\} = y(n-v) \quad (5.2)$$

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der *Impulsantwort*. Die Impulsantwort  $h(n)$  eines Systems  $A$  ist das diskrete Signal, das entsteht, wenn  $A$  auf den  $\delta$ -Impuls angewendet wird:

$$h(n) = A\{\delta(n)\}$$

Mithilfe der Impulsantwort lässt sich jedes lineare diskrete System gut charakterisieren. Doch zunächst eine weitere

**Definition 5.6** Ein System  $A$  heißt kausal wenn für die Impulsantwort  $h(n)$  von  $A$  gilt:

$$h(n) = 0 \quad \forall n < 0$$

Der letzte wichtige Grundbegriff der linearen Systemtheorie ist die *Stabilität* :

**Definition 5.7** Ein System  $A$  heißt stabil, wenn es auf jedes beschränkte Eingangssignal  $x$  mit einem ebenfalls beschränkten Ausgangssignal  $y = A\{x\}$  reagiert, wenn also gilt:

$$\exists q \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z} : |x(n)| \leq q \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z} : |y(n)| \leq r$$

### 5.2.1 Übertragungsverhalten linearer, zeitinvarianter diskreter Systeme

Mit Gleichung (5.1) kann nun ein lineares, zeitinvariantes diskretes System  $A$  wie folgt aufgrund seiner Impulsantwort  $h$  als Antwort auf eine beliebige Erregung  $x$  charakterisiert werden:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= A\{x(n)\} = A\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i)\right\} \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} A\{x(i)\delta(n-i)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)A\{\delta(n-i)\} \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i) =: x(n) * h(n) \quad (\text{Faltungssumme})
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Diese Operation auf dem Eingangssignal  $x$  und der Impulsantwort  $h$  nennt man die *Faltung* von  $x$  und  $h$ . Sie ist kommutativ, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
 x(n) * h(n) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} x(i)h(n-i) + \sum_{i=-1}^{-\infty} x(i)h(n-i) \\
 &= \sum_{i=n}^{-\infty} x(n-i)h(i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} x(n-i)h(i) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n-i) \\
 &= h(n) * x(n)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Falls das Eingangssignal  $x$  eines linearen Systems  $A$  ein zeitliches Signal ist, d.h. falls der Definitionsbereich von  $x$  als eine Menge von diskreten Zeitpunkten interpretiert wird, zu denen das Signal anliegt, so ist  $A$  immer kausal, da dann zu jedem Zeitpunkt  $n$  nur die Signalwerte  $x(i)$  mit  $i \leq n$  einen Einfluss auf  $y$  haben können (die Signalwerte nach dem Zeitpunkt  $n$  sind ja noch nicht bekannt). Die Faltungssumme aus Gleichung 5.3 lautet dann:

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^n x(i)h(n-i)$$

Diese Summe entspricht dann der Faltungssumme (Gl 5.3), wenn  $h(n) = 0$  ist für  $n < 0$ , also  $A$  kausal ist. Im Falle optischer, ortsabhängiger Systeme gilt dies nicht immer. Hier kann die Antwort auf ein Eingangssignal sehr wohl von den Signalwerten in einer Umgebung um einen bestimmten Punkt  $n$  abhängen.

Eine mögliche Darstellung bestimmter linearer zeitinvarianter Systeme zeigt das folgende

**Beispiel** In der digitalen Signalverarbeitung (siehe z.B. [Schüssler(1988)], [Oppenheim und Schaffer(1989)] oder [Papoulis(1977)]) lernt man, dass eine bestimmte Klasse von linearen zeitinvarianten Systemen durch sogenannte *Lineare Differenzgleichungen mit*

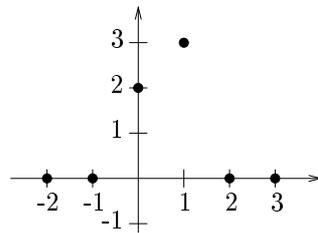


Abbildung 5.4: Impulsantwort  $h(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1)$  eines nichtrekursiven Systems

*konstanten Koeffizienten* dargestellt werden können. Das bedeutet, dass Eingangssignal  $x$  und Ausgangssignal  $y$  wie folgt in Beziehung stehen:

$$\sum_{\nu=0}^N a_{\nu}y(n+\nu) = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu}x(n+\mu) \quad (5.5)$$

Falls  $A$  kausal ist, so gilt  $M \leq N$ , da dann  $y$  nicht von "zukünftigen"  $x$ -Werten  $x(n+N+1), x(n+N+2), \dots$  abhängen kann.

Eine weitere Klassifizierung linearer diskreter Systeme erfolgt durch den Begriff der *Rekursion*.

**Definition 5.8** Ein lineares System  $A$  heißt nichtrekursiv, wenn die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$  in Gleichung (5.5) alle verschwinden, wenn also für ein Eingangssignal  $x$  mit  $A\{x\} = y$  eine Folge  $b_0, b_1, \dots, b_M$  und eine Zahl  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass gilt:

$$y(n+N) = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu}x(n+\mu)$$

Nichtrekursive Systeme sind stets stabil.

**Beispiel** Es sei mit  $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1)$  ein lineares System  $A$  gegeben.  $A$  ist nichtrekursiv und damit stabil. Außerdem ist  $A$  kausal, da für die Impulsantwort  $h(n) = A\{\delta(n)\}$  gilt:

$$h(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1)$$

und somit  $h(n) = 0$  für  $n < 0$  (die Impulsantwort ist in Abb. 5.4 zu sehen).

Es stellt sich heraus, dass die Impulsantwort eines nichtrekursiven Systems nur an endlich vielen Stellen von Null verschieden ist, weshalb man diese Systeme auch *FIR-Systeme* (engl.: finite impulse response) nennt. Entsprechend haben rekursive Systeme eine unendliche Impulsantwort, weshalb man sie auch *IIR-Systeme* (engl.: infinite impulse response) nennt. Für weitere Betrachtungen benötigen wir den folgenden

**Satz 5.1** Die Antwort eines linearen diskreten Systems auf die Exponentialfolge  $x(n) = pz^n$  mit  $p = 1$  und  $z \in \mathbb{C}$  ist wieder eine Exponentialfolge.

**Beweis:**

Nach Gleichung 5.3 gilt mit der Kommutativität der Faltung (siehe Gleichung (5.4)):

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^{n-i} h(i) = z^n \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) z^{-i} \quad (5.6)$$

Die Summe auf der rechten Seite von Gleichung 5.6 hängt nicht mehr von  $n$  ab und nimmt im Konvergenzfall einen komplexen Wert  $H(z)$  an. Damit gilt  $y(n) = H(z)z^n$ .  $\square$

Die Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (5.6) hat eine besondere Bedeutung und bekommt deswegen einen Namen:

**Definition 5.9** Ist  $h$  ein diskretes lineares Signal und konvergiert die Reihe  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)z^{-i}$  mit  $z \in \mathbb{C}$ , so heißt die Funktion

$$H(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)z^{-i}$$

die  $z$ -Transformation von  $h$ .

**Anmerkung** Die Fouriertransformation kann als Auswertung der  $z$ -Transformation auf dem Einheitskreis betrachtet werden. Sie wird gelegentlich auch so notiert ( $\mathcal{F}(\omega) = H(e^{j\omega})$ , siehe [Oppenheim und Schafer(1994)]).

**Beispiel** Es sei mit  $y(n) - ay(n-1) = x(n)$  ein lineares System  $A$  gegeben. Weiterhin sei  $A$  kausal, also  $h(n) = 0$  für  $n < 0$ .  $A$  ist rekursiv, und die Impulsantwort lässt sich aus  $h(n) - ah(n-1) = \delta(n)$  wegen der Kausalität wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} n = 0 : & \quad h(0) = \delta(0) = 1 \quad \text{wegen } h(-1) = 0 \\ n = 1 : & \quad h(1) - ah(0) = 0 \Rightarrow h(1) = a \\ n = 2 : & \quad h(2) - ah(1) = 0 \Rightarrow h(2) = a^2 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Durch Induktion folgt  $h(n) = a^n \delta(n)$ . Für  $0 < a < 1$  ist  $A$  stabil, da dann  $h(n)$  eine Nullfolge ist und somit bei beschränkter Folge  $x(n)$  die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} h(i)x(n-i)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  konvergiert. Die Impulsantwort ist für  $a = 0,5$  in Abb. 5.5 zu sehen. Um die  $z$ -Transformierte  $H$  von  $h$  zu berechnen, setzen wir  $y(n) = H(z)z^n$  und  $x(n) = z^n$  und erhalten:

$$H(z)z^n - aH(z)z^{n-1} = z^n$$

und es folgt:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

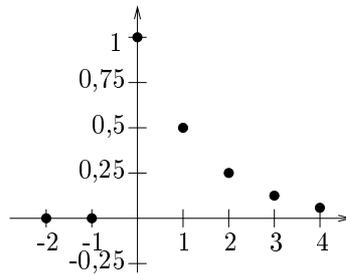


Abbildung 5.5: Rekursives System mit Impulsantwort  $h(n) = 0,5^n \cdot \sigma(n)$

### 5.3 Faltung und Korrelation kontinuierlicher Signale

Faltung	Korrelation
$z(\tau) = (x * y)(\tau) = \langle x(t), y^*(\tau - t) \rangle$ $= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt$	$z(\tau) = (x \# y)(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$ $= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt$

Beispiel für Verschiebungssatz Beispiel kommt noch

### 5.4 Zweidimensionale Faltung und Korrelation

(Innenprodukt auf verschobener Impulsantwort)

- Faltung (linear und zyklisch)

$$\begin{aligned}
 & (X(k, l) * Y(k, l))(q, r) \\
 &= \langle X(k, l), Y^*(q - k, r - l) \rangle \\
 &= \sum \sum X(k, l)Y(q - k, r - l) \\
 &\quad \longleftrightarrow \text{(2D-DFT)} \\
 &\quad \tilde{x} \circ \tilde{y}
 \end{aligned}$$

- Korrelation (linear und zyklisch)

$$\begin{aligned}
 & (X(k, l) \# Y(k, l))(q, r) \\
 &= \langle X(k, l), Y(k - q, l - r) \rangle \\
 &= \sum \sum X(k, l)Y^*(k - q, l - r) \\
 &\quad \longleftrightarrow \text{(2D-DFT)} \\
 &\quad \tilde{x} \circ \tilde{y}^*
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 X * Y &= DFT^{-1}(\tilde{x} \circ \tilde{y}) \\
 X \# Y &= DFT^{-1}(\tilde{x} \circ \tilde{y}^*)
 \end{aligned}$$

Isomorphie der diskreten (schnellen) Fouriertransformation

picture fehlt noch

Obige Isomorphie gilt nur für die zyklische Faltung!

## 5.5 Lineare Faltung + Korrelation für endlich-dimensionale Signale und Bilder

Prinzip:

Darstellung der linearen Korrelation und Faltung als zyklische Operationen; dann Anwendung der Isomorphie mit FFT.

picture

Matrixschreibweise (ist eine Topplitzmatrix):

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 & & & & 0 \\ h_1 & h_0 & & & \\ h_2 & h_1 & h_0 & & \\ & h_2 & h_1 & h_0 & \\ & & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & & & h_2 & h_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Erweiterung, so dass zyklische Faltung entsteht:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 & & & 0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & & & h_2 & \\ h_2 & h_1 & h_0 & & & \\ & h_2 & h_1 & h_0 & & \\ & & h_2 & h_1 & h_0 & \\ 0 & & & h_2 & h_1 & h_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \text{---} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allgemein: picture fehlt noch

$N \geq K + L - 1$ ; möglichst nächsthöhere 2er Potenz, damit FFT funktioniert.

Die Faltung graphisch: picture fehlt noch

Ein Beispiel für eine Konfiguration, in welcher die direkte Faltung effizienter ist, als die schnelle Faltung (den zweiten Vektor müßte man auf  $10^7$  erweitern): picture fehlt noch

Allgemein:

$$\begin{aligned} x * y &= FFT^{-1}(\tilde{x} \circ \tilde{y}) = 1/N(FFT(\tilde{x} \circ \tilde{y})^*)^* \\ x \# y &= FFT^{-1}(\tilde{x} \circ \tilde{y}^*) = 1/N(FFT(\tilde{x}^* \circ \tilde{y}))^* \end{aligned}$$

Korrelation ohne Scrambling:

picture fehlt noch

# Anhang A

## Verschiedenes

### A.1 Graycode

$$y = Ax \text{ in GF}(2) \text{ (Galois-Feld)}$$

linearer Code:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (Generator-Matrix)}$$

Rückkonvertierung:  $x = A^{-1}y$  mit  $AA^{-1} = I$  (aber: in GF(2))  
GF(2):

$$\begin{array}{l} a : \quad 0 \quad 1 \quad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \text{ (Antivalenz)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \text{ (logisches UND)} \\ a^{-1} : \quad 1 \end{array}$$

Rückkonvertierung: Gauß-Jordan-Inversion (z.B.) mit Beachtung der Rechenregeln in GF(2).

# Index

- $\delta$  (Kronecker delta), 20
- $\delta$ -Impuls, 83
  
- Abtastung, 11
- antilinear, 22
- Autokorrelationsfolge, 61
- Autokovarianzfolge, 61
  
- Basis, 23
- Basisfunktion, 47
  
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 21
  
- Dimension, 23
- direkte Summe, 29
- diskretes Signal, 83
- Dreiecksungleichung, 34
  
- Eigenfunktion, 47
- Eigenwert, 47
- Einheitskugeln, 20
- Euklidischer Raum, 17
- Exponentialfolge, 87
  
- faktorisieren, 71
- Faltung, 86, 89
- Fensterung, 11
- FIR-Systeme, 87
- Fourierkoeffizient, 47
- Fouriertransformation, 47
  
- Gleichanteil, 30
  
- Hauptachsentransformation, 60
- Helligkeitsnormierung, 32
  
- IIR-Systeme, 87
- Impulsantwort, 85
- Innenprodukt, 17
- Innenprodukt für Bilder, 45
- Innenproduktraum, 17
- Integral, Lebesgue, 20
  
- Karhunen-Loeve-Transformation, 60
- kolinear, 22
- Komplementärraum, 30
- Kontrastnormierung, 32
- Korrelation, 89
- Kronecker delta, 20
  
- Lebesgue Integral, 20
- Leistungsdichtespektrum, 61
- Lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten, 87
- linearer Vektorraum, 15
- linear unabhängig, 22
- Linksinverse, 43
  
- Markov Prozeß, 64
- Matrix,hermitesch, 32
- Matrix,selbstadjungiert, 32
- Metrik, 20
  
- Norm, 19
- Normalgleichungen, 38
- Norm einer linearen Abbildung, 34
- Normierter Raum, 19
- Normisomorphismus, 33
  
- Operator,unitär, 33
- orthogonal, 19, 22
- orthogonale Projektion, 30
- orthonormal, 20
- Orthonormalbasis, 23
  
- Parallelogrammgleichung, 22
- Parsevalsche Gleichung, 39
- Projektionssatz, 36
- Prozess, stationärer, 61
- Prozess, stochastischer, 60
- Prozess, unkorrelierter, 61
- Prozess, weißer, 61
  
- Quantisierung, 11

- Raum, normierter, 19
- Raum, Euklidischer, 17
- Rechtsinverse, 43
- Rekursion, 87
- Residuenvektor, 40
  
- separierbar, 55
- Signal, diskretes, 83
- Signalraum, diskreter, 83
- Skalarprodukt, 17
- Spaltenfunktionen, 24
- Spaltensummennorm, 34
- Spektralnorm, 34
- Sprungfunktion, 85
- Stabilität, 85
- stationärer Prozess, 61
- stochastischer Prozess, 60
- Submultiplikativität, 34
- Summe, direkte, 29
- symmetrischer Kern, 55
- System, lineares diskretes, 85
- System, kausales, 85
- System, nichtrekursives, 87
- System, zeitinvariantes, 85
  
- transiente Empfindlichkeit, 9
- Translation, zyklische, 45
- Translationsmatrix, 46
  
- Ungleichung, Cauchy-Schwarzsche, 21
- unitärer Operator, 33
- unkorreliert, 61
- Untervektorraum, 16
  
- Vektorraum, linearer, 15
- Vektorraumaxiome, 16
  
- Wechselanteil, 30
- weißer Prozess, 61
  
- z-Transformation, 88
- Zeilensummennorm, 34



# Literaturverzeichnis

- [Heuser(1992)] Heuser, H. *Funktionalanalysis*. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1992.
- [Heuser und Wolf(1986)] Heuser, H. und Wolf, H. *Algebra, Funktionalanalysis und Codierung*. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1986.
- [Jaehne(1997)] Jaehne, B. *Digitale Bildverarbeitung*. Springer Verlag, Heidelberg, 1997.
- [Jain(1989)] Jain, A.K. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1989.
- [Oppenheim und Schafer(1994)] Oppenheim, A.V. und Schafer, R.W. *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1994.
- [Papoulis(1977)] Papoulis, A. *Signal Analysis*. McGraw-Hill, Inc., NewYork, 1977.
- [Schüssler(1988)] Schüssler, H.W. *Digitale Signalverarbeitung*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, London, Paris, Tokyo, HongKong, Barcelona, Budapest, 1988.